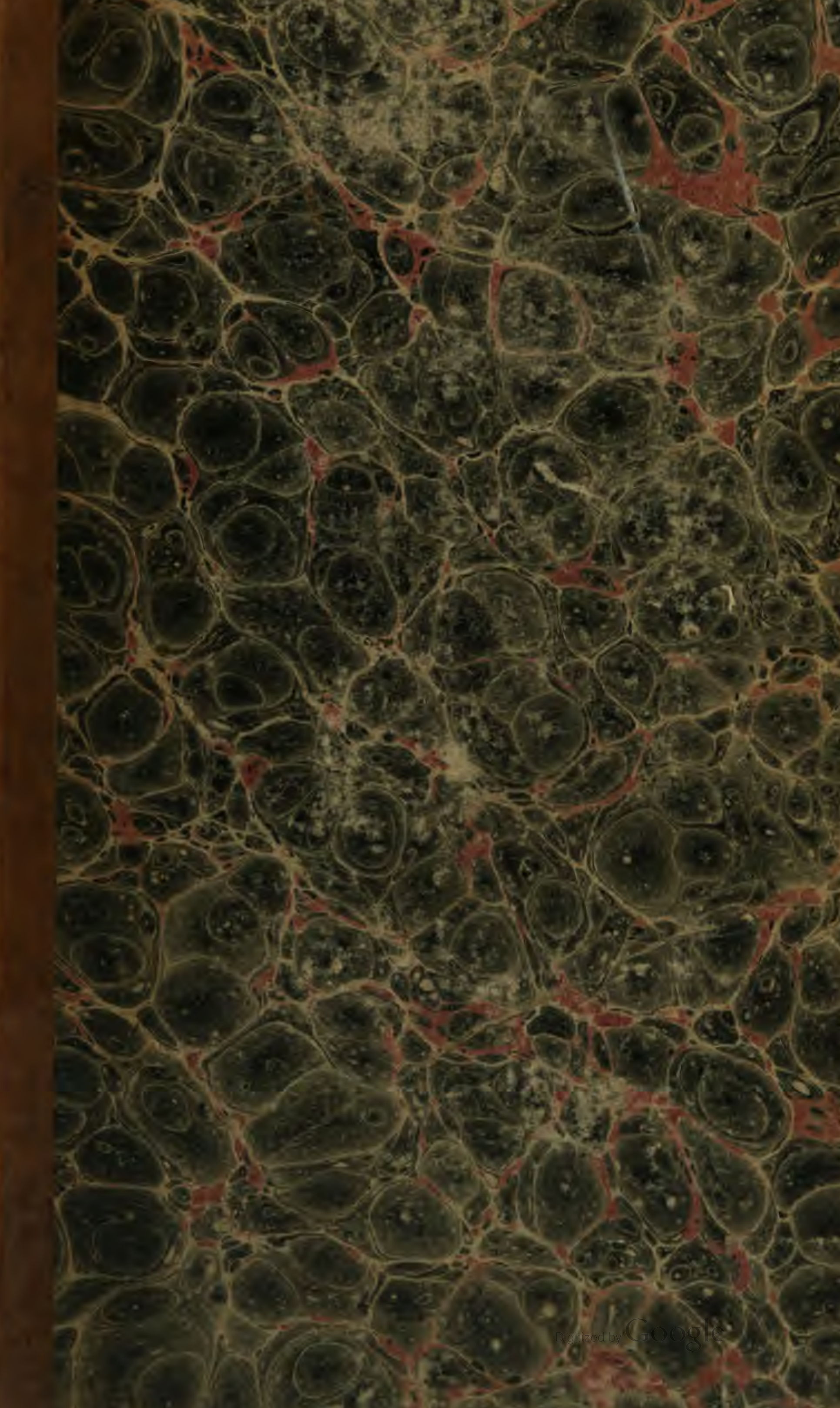
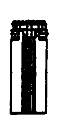




CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE

ET PHYSIQUE.

ROYAUME DES PAYS-BAS.

CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE,

PUBLIÉE

PAR MM. GARNIER, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ET D'ASTRONOMIE A L'UNIVERSITÉ DE GAND, ET QUETELET, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET D'ASTRONOMIE A L'ATHÉNÉE DE BRUXELLES; MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES DE BRUXELLES.

TOME SECOND.



A GAND,

DE L'IMPRIMERIE D'H. VANDEKERCKHOVE, AVENUE DE LA PLACE-D'ARMES, N.° 5.

1826.





MATHEMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

On nous écrit que la solution de la question : *une sphère pleine étant donnée, trouver son rayon*, (voy. pag. 80 du I.er vol. de ce recueil) se trouve dans l'ouvrage ayant pour titre : *Theodosii spherica* (*). Nous avons sous les yeux l'ouvrage cité et commenté par le célèbre *Isaac Barrow*, le maître de *Newton*, puis son collègue à la Société royale de Londres, d'où nous extrayons la solution de *Theodose*, qu'on trouve ici traduite littéralement.

1.° *Assigner une droite égale au diamètre* K *d'un cercle quelconque tracée sur la surface d'une sphère.*

Prenez sur le petit cercle ADBCA (*fig.* 1) trois points quelconques A, D et B, joignez-les par des droites ou cordes AD, DB et AB, construisez (*fig.* 2) le triangle EFG équilatéral avec le triangle ABD, c'est-à-dire, tel qu'on ait $FG = AB$, $FE = BD$ et $EG = AD$, et menez les perpendiculaires FH à FE, GH à GE, lesquelles iront concourir en H : je dis qu'on aura $EH = AC$ qui est le diamètre du petit cercle. Menons CD : à cause de la somme des angles $EFH + EGH = 2$ droits, on aura $FEG + FHG = 2$ droits ; d'où il suit que le quadrilatère EFHG est inscriptible ; donc l'angle $EHG = EFG = ABD = ACD$. On a d'ailleurs $HGE =$ ang. droit $= CDA$: donc, à cause de $EG = AD$, les triangles EHG et ADC sont égaux et donnent $EH = AC$.

(*) In temporibus *Ciceronis* et *Pompeii* claruit *Theodosius Tripolites* qui partem Geometriæ de figura sphærica libris tribus utilissimis egregie excoluit. Compluria ex eo (*Theodosio*) *Ptolomæus* hausit et *Ptolomæo* recentiores *Pappus*, *Proclus*, *Theon* multa item, sed dissimulato *Theodosii* nomine.





2.° *Assigner une droite* EH *égale au diamètre* AB *d'une sphère donnée.*

Sur la surface de la sphère, prenez deux points A et B à volonté (*fig.* 3); du pôle A et de l'intervalle AB décrivez le cercle BZD; déterminez par le problême précédent une droite FG égale au diamètre BD de ce cercle; sur FG (*fig.* 4) construisez le triangle FEG équilatéral avec le triangle BAD qui est isoscèle; menez les perpendiculaires FH et GH aux côtés FE et GE; elles concourront en un point H, et la droite EH sera le diamètre AC de la sphère.

On peut maintenant reconnaître si la solution de M. *Quetelet* est empruntée *des sphériques,* ouvrage que mon collègue ne connaissait que de nom : d'ailleurs *Theodosius* s'est borné à ces deux questions.

J. G. G.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

PERSPECTIVE.

Principes fondamentaux de la perspective linéaire et applications à la solution de quelques questions de Géométrie.

En lisant dans le premier volume de la *Correspondance*, l'analyse faite par M. *Quetelet* du mémoire de M. *Dandelin*, sur l'emploi des projections stéréographiques en Géométrie, on a pu remarquer qu'il existe un certain ordre de propositions de Géométrie, qui se rapportent seulement aux directions des lignes, et dans lesquelles on ne considère en aucune manière leurs longueurs relatives ou absolues, non plus que la grandeur des angles qu'elles font entre elles. On peut appliquer à ce genre de propositions des méthodes particulières de démonstrations dont on trouve plusieurs beaux exemples dans le mémoire cité, auxquels nous nous proposons ici d'en ajouter d'autres qui ne sont pas sans quelqu'intérêt. Nous poserons d'abord une série de théorèmes qui sont explicitement ou implicitement énoncés dans *le supplément à la Géométrie descriptive de Monge, par M. Brisson;* dans l'ouvrage de M. *Vallée*, ayant pour titre : *Science du dessin, faisant suite à la Géométrie descriptive;* dans *la Correspondance sur l'École Polytechnique*, par M. *Hachette*, et dans les traités de perspective.

Ces théorèmes reposent en partie sur ce principe : si un plan est

parallèle à une droite, et si par cette droite on fait passer une suite de plans, ceux-ci couperont le plan parallèle à la droite, suivant des parallèles.

I. Si l'on interpose une surface plane et qu'on pourra supposer transparente, entre l'œil du spectateur et un corps, et qu'on conçoive des rayons visuels vers les points du corps, ou de chaque point du corps, un rayon visuel dirigé vers l'œil (*), chaque rayon rencontrera le plan en un point : l'intersection de la surface interposée par ce faisceau de rayons visuels, ou de rayons lumineux, est nommée *perspective linéaire* du corps, qu'il faut distinguer de la *perspective aérienne* qui s'occupe de la détermination des teintes dont l'image doit être revêtue. Le point de l'espace, qu'occupe l'œil du spectateur, s'appelle *point de vue :* la surface sur laquelle on représente le corps, celle qui est coupée par le cône des rayons visuels ou lumineux, se nomme *tableau,* et l'on donne, en général, le nom d'objet au corps ou au système de corps qu'on veut représenter. La perspective d'un point, est donc l'intersection du tableau, par le rayon visuel mené de l'œil au point; celle d'une droite, est l'intersection du tableau, par un plan mené par l'œil et par la droite, en sorte que la perspective est une autre droite; celle d'une courbe est l'intersection du tableau et d'un cône formé des rayons visuels menés de l'œil, à tous les points de la courbe, intersection qui, généralement parlant, est une courbe.

II. *Si plusieurs droites* A, B, C... *sont parallèles entre elles et situées dans le même plan, si de plus le plan du tableau est parallèle à ces droites, leurs perspectives* a, b, c... *seront parallèles entre elles.* En effet, O désignant l'œil ou le point de vue, et le plan de perspective étant, par exemple, situé entre celui des objets et l'œil O, les intersections *a*, *b*, *c*... du plan de perspective par les plans OA, OB, OC..., sont des droites parallèles : de plus, ces plans se coupent suivant une droite passant par O et parallèle aux droites A, B, C... *a*, *b*, *c*...

III. *Si plusieurs droites* A, B, C... *sont parallèles entre elles, et si leur plan n'est pas parallèle à celui du tableau, les perspectives*

(*) Le rayon visuel dirigé vers un point et le rayon de lumière envoyé par ce point à l'œil, coïncident et ne diffèrent qu'en ce que le rayon visuel est conçu comme partant de l'œil, et le rayon de lumière comme partant du point. Le rayon de lumière est un être réel, et le rayon lumineux, un être imaginaire.

a, b, c... *concourront en un point.* Considérons la droite A; sa perspective *a* sera l'intersection du tableau par le plan OA ; si par l'œil O on conçoit une droite A′ parallèle à A, elle sera toute entière dans le plan OA. Passons à la droite B : sa perspective *b* sera l'intersection du plan du tableau par le plan OB; et si par le point O, on conçoit une parallèle B′ à B, elle se confondra avec A′ et elle sera l'intersection des plans OA et OB. On prouvera de la même manière que les autres plans OC, OD... se couperont suivant la même droite A′ ou B′. Or, cette intersection parallèle aux plans des objets, ne pouvant l'être à celui du tableau, rencontrera ce dernier en un point R qui sera celui de concours des perspectives *a*, *b*, *c*... Il suit de là que, pour avoir le concours des perspectives d'autant de droites parallèles qu'on voudra, lorsqu'elles sont situées dans un même plan, il suffit de mener par l'œil une parallèle à ces droites, et le point R où elle rencontrera le plan du tableau, sera celui qu'on cherche.

IV. *Si plusieurs droites* A, B, C... *situées dans un même plan, concourent en un point* R, *et si le plan de perspective est parallèle à celui de ces droites, leurs perspectives* a, b, c... *concourront en un point* r *qui sera la perspective de* R. En effet, les plans OA, OB, OC... se couperont suivant la droite OR qui percera le plan de perspective dans le point *r*, perspective de R.

V. *Lorsque plusieurs droites* A, B, C... *situées dans un plan, concourent en* R, *on peut toujours donner au plan de perspective une position telle que les perspectives* a, b, c... *soient parallèles entre elles.* En effet, concevons l'œil O joint au point R par une droite OR, et imaginons le plan P de perspective, situé entre OR et le plan des objets, et parallèle à OR : les plans ORA, ORB, ORC... couperont le plan P suivant des droites *a*, *b*, *c*... parallèles entre elles. Si l'on suppose le plan de perspective, prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre celui des objets suivant une droite TT′ qui sera parallèle à OR, cette intersection TT′ coupera les droites A, B, C... en des points *r*, *r′*, *r″*... qui seront ceux de rencontre du plan des objets par les perspectives *a*, *b*, *c*....

VI. *Si plusieurs faisceaux de droites situées dans un même plan, concourent en des points* R, R′, R″... *situés sur une même droite* L, *il sera toujours possible de donner au plan* P *de perspective, une position telle que les perspectives de toutes les droites qui appartiennent à un même faisceau, soient parallèles entre elles.* A cet effet,

qu'on conçoive un plan parallèle au plan LO (O désignant toujours l'œil), situé entre LO et le plan des objets, et qu'on le prenne pour plan de perspective : les plans menés par la parallèle OR à ce dernier plan et par les droites du premier faisceau, qui toutes concourent en R, couperont le plan de perspective suivant des droites parallèles entre elles. Les plans menés par O et par les droites du second faisceau qui vont concourir en R′, se coupant suivant la parallèle OR′ au plan de perspective, couperont aussi ce dernier suivant des droites parallèles entre elles; et ainsi de suite. Il est essentiel d'observer que la direction commune des parallèles, change en passant d'un faisceau de droites à un autre. Toutes les droites qui, dans le plan de perspective, seront vues parallèles entre elles, repondront dans le plan des objets, à des droites qui iront concourir en un point de la droite L. Cette remarque est importante. Il est facile, d'après ce qui a été dit (V), de trouver les points dans lesquels les perspectives prolongées percent le plan des objets.

VII. *Si l'on conçoit un système de droites situées dans un même plan, et dont chacune passe par un point fixe que nous nommerons pôle, autour duquel elle ait la faculté de tourner; si de plus tous ces pôles se trouvent sur une même droite, il sera possible de donner au plan de perspective, une position telle que chaque droite, lorsqu'elle tourne autour de son pôle, paraisse se déplacer parallèlement à elle-même.* A cet effet, on prendra le plan de perspective parallèle à celui qui passe par l'œil et par la droite des pôles, et intermédiaire entre ce dernier et celui des objets : cela posé, le pôle R, par exemple, étant celui de concours des positions successives de la droite qui tourne autour de ce point, il résultera du théorème IV, que les perspectives de ces positions seront parallèles, et qu'ainsi la droite qui tourne autour de R, sera vue, en perspective, se mouvant parallèlement à elle-même. Ce théorème peut avoir de nombreuses applications.

Remarque. On pourra, au besoin, prendre le plan de perspective pour celui des objets.

Nous allons faire quelques applications de ces principes.

PROBLÊME I.

Deux droites non parallèles AB *et* CD *et un point* E *étant donnés, mener par ce point une troisième droite qui concoure au même point que les deux droites données* (*).

Le point E peut-être extérieur ou intérieur aux droites données.

I.er Cas. Supposons (*fig.* 5) que les droites concourent en R, et joignons le point E au point R. Par la position arbitraire du point de vue O et par la droite RE, imaginons un plan et menons lui entre l'œil et le plan des objets, un plan parallèle que nous prendrons pour celui de perspective. En vertu du théorème VI les perspectives *ab* et *cd* des droites données, seront parallèles ainsi que celles *efh*, *emn*, *egk* des droites EFH, EMN, EGK. Cela posé, on peut imaginer que les transversales EH, EN, EK soient menées de telle manière que les perspectives *fhnm* et *nmgk* des quadrilatères FHNM et NMGK soient deux parallélogrammes égaux *p* et *p'* dont chacun est la moitié du parallélogramme *fhkg* ou P, perspective du quadrilatère FHKG (**). Or, les parallélogrammes *p* et *p'* étant égaux et compris entre les mêmes parallèles *ab* et *cd*, ont leurs diagonales *hm* et *ng*, *nf* et *km* parallèles; donc, dans le plan des objets, les droites correspondantes HM et NG, NF et KM, doivent concourir en des points *o* et *o'* qui ne peuvent se trouver que sur la droite RE (VI). Ainsi la droite des points E et *o*, la même que celle des points *o'* et E ira concourir en R. Ce problême peut donc se construire par la règle seulement. Dans la perspective, les intersections *i*, *i'*, *i''*... des diagonales des parallélogrammes, perspectives des quadrilatères quelconques HFMN, NMGK, KGPQ, sont placées sur une parallèle aux perspectives *ab* et *cd*, et à distances égales de ces parallèles; d'où on conclut que les intersections I, I', I''... se trouvent sur une droite qui passe par le concours R de AB et CD.

(*) Nous avons annoncé une solution de cette question dans une note (*Corresp.* I.er vol. pag. 322).

(**) On peut d'abord mener EFH et EGK; les diagonales HG et FK qui se coupent en L; puis la droite ELN : alors les perspectives *fhnm*, *nmgk* sont les parallélogrammes *p* et *p'* égaux et moitié chacun du parallélogramme *hfgk* ou P perspective de HFGK.

IIme Cas. On pourrait faire rentrer ce cas dans le précédent, par une construction qui se présente d'elle-même : cependant nous croyons devoir donner avec quelques développemens la solution de M. *Hachette* (Corresp. sur l'Ecole Polytech., Ier vol., pag. 305). On peut concevoir qu'on ait (*fig.* 6) dans un plan horizontal deux droites parallèles *ab* et *cd*, puis un plan vertical mené par TT', qui soit le plan de perspective. Cela posé, l'œil O étant situé à gauche du plan P, verra les parallèles *ab* et *cd* en perspective suivant deux droites AB et CD lesquelles sont les intersections du plan P, par les plans O*ba* et O*dc*; ces perspectives se couperont en R, point dans lequel l'intersection de ces deux plans perce celui de perspective; de plus ces perspectives RBA et RDC rencontreront le plan horizontal en *r* et *r'*. Quelle que soit la position du point E donné entre les droites BA et DC, puisque la droite par E doit aller passer par le point de concours R, on pourra toujours supposer que la position de l'œil O soit telle que la droite RE qui rencontre le plan horizontal en ρ, soit la perspective d'une parallèle *ei* équidistante de *ba* et *dc*, en sorte que E soit la perspective de *e*. Cela posé, considérons la perspective (*fig.* 7). Les deux droites GEH et FEK seront les perspectives des diagonales d'un parallélogramme compris entre les parallèles *ba* et *dc* : le point de concours des côtés HF et KG qui sont aussi des perspectives, sera en L (*); si par L, on mène la droite LMN, elle sera la perspective d'une parallèle aux côtés du parallélogramme, ayant FH et GK pour perspectives : mais les centres de ces deux parallélogrammes contigus, sont placés sur la parallèle *ei* (*fig.* 6) qui a pour perspective EI passant par les intersections des diagonales HG et KF, KM et NG, droite qui va concourir en R et qu'on peut construire avec la règle.

PROBLÊME II.

Soient deux droites AR *et* DR *qui concourent en* R : *sur la première, on prend trois points* A, C *et* E, *sur la seconde trois points* D, F *et* B; *on mène les droites* ED, EF, AB, AF, CD et CB, *et il s'agit de prouver que les intersections* K, I *et* H *sont en ligne droite.*

Imaginons le plan de perspective, mené parallèlement à celui

(*) Si par l'œil O et par deux parallèles entre *ba* et *dc*, on conçoit des plans, leurs intersections par le plan P, concourront en un point.

qui passe par l'œil O et par les points H et I (*fig.* 8); les plans menés par O et par les droites AB et ED, se coupant suivant OI parallèle au plan de perspective, couperont ce dernier suivant deux parallèles : les perspectives *ab* et *ed* seront donc parallèles, et il en sera de même des perspectives *cb* et *ef* des transversales CB et EF. Ainsi en désignant les perspectives des points grandes lettres, par les petites lettres correspondantes, il arrivera que, dans le plan de perspective (*fig.* 9), les lignes *ab* et *ed* seront vues parallèles, ainsi que *cb* et *ef*. On aura donc les triangles semblables *rba* et *rde* qui donnent

$$re : ra = rd : rb;$$

mais les triangles semblables *ref* et *rcb* donnent

$$re : rc = rf : rb;$$

donc

$$re \times rb = ra \times rd = rc \times rf$$

et conséquemment

$$ra : rf = rc : rd$$

qui montre que *cd* est parallèle à *af*; d'où l'on conclut que, dans le plan des objets, les droites CD et AF doivent concourir en un point K qui ne peut être que sur HI; car ces droites ne peuvent paraître parallèles dans le plan de perspective, qu'autant que le plan de l'œil et des points H et I passe par K (VI).

Cette propriété se trouve démontrée autrement dans *les collections mathématiques de Pappus*, pag. 368, liv. VII : ce géométre considère d'abord le cas où les droites AE et DB sont parallèles. Nous verrons que cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une autre beaucoup plus générale.

PROBLÈME III.

Soit (*fig.* 10) *un quadrilatère* ABDC *inscrit à un cercle, dont on prolonge les côtés opposés* AB *et* CD, DB *et* CA *jusqu'à leurs rencontres en* R *et* R' : *aux quatre sommets* A, B, D *et* C, *on mène des tangentes qui, prolongées, forment le quadrilatère circonscrit* FGHE : *les deux diagonales* DA *et* CB *du quadrilatère inscrit, se coupent en* I : *il s'agit de prouver que les diagonales* EG *et* FH *du quadrilatère circonscrit, passeront par les concours* I *et* R', I *et* R (*Corresp.* 1.er *vol., pag.* 260) *n.o* 10).

Concevons un plan par l'œil O et par la droite des concours R et R', puis parallèlement à ce plan, entre l'œil et celui de la planche, menons un plan que nous prendrons pour celui de perspective. Si par la droite OR et par les côtés CD et AB, on fait passer deux plans, leurs perspectives *cd* et *ab* seront deux parallèles. On obtiendra de la même manière deux parallèles *ca* et *db* pour perspectives des côtés CA et DB. On sait d'ailleurs que la perspective du cercle, est une ellipse : donc, dans la perspective (*fig.* 11), le quadrilatère ABDC deviendra un parallélogramme *abdc* inscrit à l'ellipse, dont les deux diagonales *ad* et *cb*, perspectives de AD et CB, se coupent au centre *i* de l'ellipse, perspective de l'intersection I. Le quadrilatère FGHE circonscrit au cercle, aura pour perspective le quadrilatère *fghe* circonscrit à l'ellipse et formé de tangentes aux sommets du quadrilatère inscrit; et comme les diagonales *fh* et *eg* se coupent au centre *i* de l'ellipse, nécessairement les diagonales FH et EG se couperont en I. Comme d'ailleurs *fh* est parallèle aux côtés *ab* et *cd*, il faut en conclure que, dans la figure donnée, la diagonale FH concourt en R, et qu'aussi l'autre diagonale EG concourt en R'. Enfin puisque les quatre droites *ab* et *cd*, *ac* et *bd*, *ef* et *hg*, *eh* et *fg* sont parallèles deux à deux, nécessairement les droites AB et CD, AC et BD, EF et HG, EH et FG qui leur répondent dans l'autre figure, concourront en des points situés sur la droite RR'.

PROBLÊME IV.

Ayant deux sections coniques quelconques, par exemple, deux ellipses disposées arbitrairement sur un même plan, si dans la première on inscrit à volonté une corde qui, prolongée, s'il le faut, touche la seconde, les deux tangentes menées aux extrémités de cette corde, iront se couper sur une troisième section conique.

On peut regarder les deux courbes données comme les bases de deux cônes qui ont un sommet commun, et qui de plus sont tels qu'un même plan les coupe suivant deux cercles; ou ce qui revient au même, on peut concevoir deux cônes dont les bases circulaires soient dans un même plan, qui aient un sommet commun et qui soient coupés par un plan non-parallèle à celui des bases. Il est clair que par cette considération, le théorème énoncé se trouve ramené au cas où les sections coniques données sont deux cercles C et

C′ (*fig.* 12), perspectives des deux courbes, pour l'œil placé au sommet commun. Il s'agit donc de prouver que le lieu des points M, ou des intersections des tangentes en T et T′, etc., est une ligne du second ordre. Du centre C′ tirons une parallèle C′tt' à la corde arbitraire T′T qui touche le cercle du centre C′, et par les points de contact t et t' menons des tangentes qui aillent se couper quelque part en m. Si des points M et m on abaisse les perpendiculaires MP et mp sur la ligne des centres C′C, les triangles semblables CMP, cmp et CC′O donneront

$$CC' \times CP = CM \times CO'$$
$$CM \times Pp = CP \times Mm;$$

mais si sur mC et MC comme diamètres, on décrit des demi-cercles qui passeront par t et T, on aura

$$Cm : CM = CO : CO', \text{ d'où } Mm : CM = OO' : CO',$$

et conséquemment

$$Mm \times CO' = CM \times OO' :$$

multipliant ces trois équations par ordre, on a

$$CC' \times Pp = CM \times OO'$$

Posant $CP = x$, $PM = y$, on aura $Pp = Cp - x$, $CM = \sqrt{x^2 + y^2}$: donc

$$CC'(Cp - x) = OO'\sqrt{x^2 + y^2} :$$

mais, par construction, CC′, OO′ et Cp (*) sont des constantes : donc la dernière équation établit entre les coordonnées x et y une relation du second degré.

(*) On démontre 1° que si par un point pris arbitrairement dans le plan d'une ligne du second degré, on mène une suite de sécantes, et si par les deux points d'intersection de chacune d'elles, avec la courbe, on mène à cette même courbe deux tangentes terminées à leur point de concours, les tangentes qui aboutissent aux extrémités d'une même sécante, formeront une suite d'angles circonscrits dont les sommets seront tous sur une même droite : 2.° que si l'on circonscrit à une ligne du second degré, une suite d'angles dont les sommets soient sur une même droite située, comme on le voudra, sur le plan de la courbe, les sécantes qui joindront les points de contact des côtés de ces angles avec la courbe, concourront toutes en un même point Ici le point de départ des sécantes, est le centre C′. (Voyez ma Géom. Analy. pag. 261 et suiv.)

PROBLÈME V.

Soit (fig. 13) un hexagone ABCDEF *inscrit dans un cercle ; qu'on en prolonge les côtés opposés* AB *et* ED, BC *et* FE, CD *et* AF *jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en* R, R′ *et* R″, *ces trois points seront en ligne droite.*

On a déjà vu (*Corresp.* I.er vol., pag. 262) que si par les points de concours R et R′ on mène à une sphère un plan tangent qui la touche en O, et si parallèlement à celui-ci on en conçoit un autre pris pour le plan de perspective, les intersections *ab* et *ed* du plan de perspective, par les plans ROAB et ROED qui se coupent suivant RO, seront parallèles, et qu'il en sera de même des intersections *bc* et *fe* du même plan de perspective par les plans R′OBC et R′OFE (*) : d'où il résulte que, dans la perspective qui est un cercle, on aura l'hexagone *abcdef* (*fig.* 14) dans lequel il reste à prouver que les côtés *af* et *cd* sont parallèles. On a d'abord

$$caf + acd = \frac{fe + ed + dc}{2} + \frac{af + fe + ed}{2} = fe + eb + \frac{dc + af}{2}$$

$$afd + fdc = \frac{ab + bc + dc}{2} + \frac{af + ab + bc}{2} = ab + bc + \frac{dc + af}{2}$$

mais à cause de l'angle $abc = fed$, il vient $fe + ed = ab + bc$; donc

$$caf + acd = afd + fdc :$$

d'ailleurs dans le quadrilatère inscrit *acdf*, on a

$$(caf + acd) + (dfa + cdf) = 4^d; \text{ donc } 2\,(caf + acd) = 4^d$$

d'où $caf + acd = 2^d$; ce qui démontre le parallélisme des cordes AF et CD. Ainsi, dans le plan des objets, les droites CD et AF concourent en l'un des points de la droite RR′.

Dans un prochain numéro, nous reviendrons sur quelques autres conséquences de ce théorème et sur celui de M. *Brianchon.* Nous observerons cependant que si par les points de concours R, R′, R″ on mène un plan qui coupe le cône droit ou oblique qui a pour base le cercle auquel est inscrit l'hexagone ABCDEF, section qui sera une ellipse, et si on prend pour point de vue le sommet O de ce cône, les intersections de l'ellipse par les plans OAB et OED, OBC et OFE,

---

(*) Le cercle auquel est inscrit l'hexagone, est l'intersection de la sphère par un plan mené par son centre et la droite RR′.

OCD et OAF détermineront un hexagone inscrit à l'ellipse et dont les côtés opposés concourront dans les mêmes points R, R′ et R″ rangés en ligne droite.

J. G. G.

De la sphère tangente à quatre sphères.

Voici une nouvelle solution du problême de mener une sphère tangente à quatre autres sphères données de position : nous la tirons encore des papiers que M. *Dandelin* a bien voulu confier à notre amitié : quoique la démonstration ne s'y trouve pas, on la concevra sans peine, en s'aidant des considérations exposées dans les cahiers précédens, et surtout aux paragraphes 14 et 15 de la page 264.

1.° Tous les couples de plans de cercles communs à la fois à une sphère mobile et variable, et à deux sphères fixes, ont leurs intersections sur un plan unique perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux sphères fixes. Ce plan établissant entre les élémens des deux sphères des relations nécessaires, nous le désignerons sous le nom de *plan corrélatif* des deux sphères.

2.° Trois sphères, prises deux à deux, donnent trois plans corrélatifs lesquels se coupent suivant une seule et même droite, perpendiculaire au plan des trois centres, et qui sera la *droite corrélative* des trois sphères.

3.° Quatre sphères ont six plans corrélatifs qui se coupent en un point unique lequel est le *point corrélatif* de ces quatre sphères.

4.° Si l'on conçoit une sphère mobile, mais assujettie à toucher toujours trois autres sphères, la série de ses points de contact avec une de celles-ci, sera un cercle dont le plan passe par la droite corrélative des trois sphères fixes.

5.° Enfin, si une sphère en touche quatre autres, on trouvera les points de contact de la manière suivante.

Soient A, B, C et D les quatre sphères; menons trois cônes tangens l'un aux sphères A et D, l'autre aux sphères B et D, et le troisième aux sphères C et D. Par les trois sommets des cônes, concevons un

plan, et soit *d* le pôle de ce plan par rapport à la sphère D, ou bien le point où se coupent les trois cercles de contact : si par le point *d* et le point corrélatif des quatre sphères, on mène une droite, elle coupera la sphère D en deux points par chacun desquels on pourra mener une sphère tangente aux quatre sphères données (*).

A. Q.

Si l'on convient de désigner par une lettre particulière chacune des conditions que doit remplir le cercle ou la sphère cherchée, et que les lettres suivantes signifient

1.° *p* Passer par un point donné.

2.° *l* Toucher une droite donnée.

3.° *c* Toucher un cercle donné.

4.° *r* Avoir un rayon donné. Cette condition ne peut entrer qu'une fois dans chaque combinaison.

5.° *t* Toucher une droite ou un cercle en un point donné. Cette condition équivaut à deux pour le cercle comme pour la sphère.

6.° *d* Avoir son centre sur une droite donnée. Cette condition ne peut être employée que deux fois dans chaque combinaison. On ne doit pas l'employer par rapport à la sphère, parce qu'elle équivaut à avoir son centre sur deux plans.

7.° P Toucher un plan donné.

8.° *s* Toucher une sphère donnée.

9.° T Toucher un plan ou une sphère en un point donné, ce qui équivaut à trois conditions.

10.° D Avoir son centre dans un plan donné. Cette condition ne peut être employée plus de trois fois dans chaque combinaison.

(*) Voy. tom. III de la Corr. sur l'Ecole Polyt. pag. 203 et suiv. la solution par M. *Dandelin*, de ce problème : *étant données trois circonférences* c, c' *et* c'', *trouver une quatrième circonférence qui leur soit tangente*. En prenant ces cercles pour les grands cercles de trois sphères, il réduit le problème à mener une sphère tangente à trois autres et dont les centres soient dans le plan du triangle *c*, *c'*, *c''* (*c*, *c'*, c'' pouvant aussi désigner les centres des cercles ou des sphères). A la suite, on trouve une indication très-curieuse des solutions tant synthétiques qu'analytiques de ces questions.

J. G. G.

Les combinaisons ternaires entre les petites lettres, admissibles entre les données précédentes, combinaisons relatives à des cercles déterminés par trois conditions, sont au nombre de trente-trois dont six admettent une solution; quatorze en admettent deux; huit en admettent quatre, et cinq en admettent huit chacune.

Les combinaisons quaternaires entre toutes les lettres ci-dessus, relatives aux sphères déterminées par quatre conditions, sont au nombre de 74 dont 12 admettent une solution chacune; 29 en admettent 2; 16 en admettent 4; 10 en admettent 8; et 7 en admettent chacune 16. Voyez (XVIe cahier du Journal de l'Ecole Polytech.) un mémoire de M. *Gaultier*, ancien élève de cette Ecole, maintenant professeur au Conservatoire des arts et métiers, à Paris.

J. G. G.

De la construction des points brillants et des courbes uniformément éclairées.

Il a été parlé plusieurs fois dans le volume précédent d'une nouvelle théorie des caustiques, qui tend à faire considérer ces lignes comme les développées d'autres courbes plus simples que j'ai nommées *caustiques secondaires :* je vais maintenant essayer d'en offrir quelques applications à d'autres problêmes intéressans pour l'optique.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de chercher sur une surface éclairée par un point rayonnant, quels sont les points où les rayons lumineux forment un même angle d'incidence donné avec la surface. On pourra concevoir par le point lumineux, une suite de plans qui coupent la surface éclairée selon des courbes, et déterminer pour chacune d'elles les points demandés.

Soit (*fig.* 15) *abc* une pareille courbe et L le point lumineux : supposons qu'on ait à construire tous les points de la courbe où l'angle d'incidence du rayon lumineux est égal à $\frac{1}{2}m\mathrm{A}n$. On construira d'abord la caustique secondaire *lLd*, comme nous l'avons indiqué dans le 1.er vol. page 14. Les rayons réfléchis, aux points cherchés, seront

alors perpendiculaires à cette caustique secondaire. De plus, les distances bl de ces mêmes points, aux pieds des perpendiculaires, seront égales aux distances bL de ces points au point lumineux, comme rayons des mêmes cercles. Mais dans les triangles isoscèles Lbl, l'angle compris entre les côtés égaux, doit valoir l'angle donné mAn; ainsi tous les triangles qui seront dans les mêmes circonstances, auront leur sommet b en un des points demandés. Il résulte de là que si, en même temps qu'on décrit du point b la circonférence Ll pour construire la caustique secondaire lLd, on décrit du point L un autre arc, avec un rayon Ll=mn, en faisant mA=nA=Lb, la suite des points d'intersection l formera une courbe *auxiliaire* ll' qui aura différens points communs avec la caustique secondaire : or, ces points répondront aux points cherchés de la courbe réfléchissante.

Le problême est donc ramené à chercher les points communs à deux courbes qui se construisent toutes deux facilement et en même temps : l'une est la caustique secondaire et l'autre la courbe auxiliaire. Mais, avec un peu d'attention, nous allons reconnaître sans peine, que cette dernière courbe est toujours semblable à la courbe réfléchissante donnée, ce qui offre un nouvel avantage pour la construction.

En effet, menons du point lumineux L plusieurs sécantes Lb', Lc à la courbe donnée : les points correspondans sur la courbe auxiliaire, seront sur les droites Ll', Lo menées de telle manière que les angles b'Ll', cLo seront tous égaux à Amn; de sorte que les angles cLb', oLl' seront égaux entre eux. De plus, pour les angles égaux, les rayons vecteurs Lc, Lb, Lb' et Lo, Ll, Ll' seront évidemment proportionnels, ce qui est le caractère des courbes semblables.

On pourra donc construire la courbe auxiliaire par points, comme nous l'avons indiqué plus haut; ou bien encore, en partant de ce principe très-simple, qu'elle est semblable à la courbe proposée. Il est bon de remarquer que les points correspondans sont toujours sur deux rayons vecteurs qui renferment entre eux un angle constant.

Quand le point lumineux est à une distance infinie, on peut, pour la caustique secondaire, employer la construction suivante que j'ai donnée dans mon premier mémoire sur les caustiques page 138. La caustique secondaire est encore la ligne enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe réfléchissante et qui sont tangens

à la perpendiculaire à la direction commune des rayons incidens. Quant à la courbe auxiliaire, on la construit par points comme précédemment. Cette courbe auxiliaire est encore une perspective de la courbe réfléchissante donnée, mais elle ne lui est plus semblable.

La construction des points *brillans* pour une courbe quelconque, devient aussi très-facile par les considérations suivantes. Imaginons un point rayonnant L (*fig.* 16), une courbe quelconque *mn* et un œil placé en A. Il est évident que les rayons QA, PA réfléchis par la courbe vers le point A, seront tous perpendiculaires à la caustique secondaire de la courbe proposée en *p*, *q*, etc.; de plus les distances QL et Q*q*, PL et P*p*, sont nécessairement égales.

Cela posé, on pourra faire dépendre encore ici la construction des points brillans de celle de deux courbes dont l'une sera comme précédemment, la caustique secondaire de la courbe *mn*. En effet, menons du point A une série de droites AP, AQ etc. qui coupent la courbe donnée; puis des points P, P′, Q, Q′... comme centres, décrivons les circonférences qui auront pour ligne enveloppe la caustique secondaire : ces circonférences couperont en même temps la série des droites menées du point A, en des points $p_{,}$, $p_{,}'$, p, p', q... qui seront sur des courbes auxiliaires $pp'qm$, $p_{,}\ p_{,}'n$. Or, ces courbes auxiliaires par leur contact avec la caustique secondaire, détermineront les points *p*, *q*... par lesquels passeront les rayons réfléchis demandés. Ici encore l'on aura l'avantage de construire à la fois par des procédés graphiqnes très-simples, les deux courbes dont dépendent les solutions du problême.

Quand le point rayonnant est à une distance infinie, le problême n'offre pas plus de difficultés et se résout d'après les mêmes principes.

A. Q.

Du contact des surfaces coniques avec les surfaces du second degré.

Le lemme posé par M. *Dandelin*, (1.er vol. pag. 257, n.o 3) est compris comme cas particulier, dans les recherches dont nous allons

rendre compte. Le célèbre *Monge* a démontré que lorsqu'une surface conique enveloppe une surface du deuxième degré, la courbe de contact est toujours plane; que ce plan dont la position est dépendante de celle du cône, passe toujours par une même ligne droite, lorsque le sommet du cône circonscrit, se meut en ligne droite. En supposant ensuite que le sommet de ce cône, soit dirigé dans son mouvement par une surface plane déterminée, le même Géomètre a démontré que le plan de contact passe toujours par un même point. M. *Livet* a étendu l'analyse de M. *Monge* aux trois cas suivans : le sommet du cône peut se mouvoir en parcourant une courbe à double courbure; en parcourant une surface courbe; ou enfin ce sommet peut se mouvoir d'une manière discontinue. En appliquant son analyse au cas ou la surface touchée ou enveloppée est une sphère et supposant 1.° que la directrice du sommet du cône soit une droite, M. *Livet* prouve que tous les plans de contact passent par une droite; et que le plan mené par cette droite et par le centre de la sphère est perpendiculaire à la directrice; 2.° que la surface directrice soit plane, il démontre que tous les plans de contact passent par le même point, et que la ligne qui joint ce point au centre de la sphère, est perpendiculaire à la surface directrice; 3.° que la surface enveloppée soit un ellipsoïde, ainsi que la surface directrice et que de plus cette dernière soit concentrique à l'autre, le plan de contact, dans son mouvement, sera toujours tangent à un ellipsoïde concentrique aux deux premiers, et dont chacun des axes principaux sera une troisième proportionnelle aux axes de la surface enveloppée et de la surface directrice, qui se trouvent dans la même direction : d'où l'on conclut comme cas particulier, d'abord que si le sommet d'un angle circonscrit à une courbe du second degré, se meut en ligne droite, la ligne qui joindra les points de contact des deux côtés de l'angle avec la courbe, passe toujours par un certain même point; et, en second lieu, que si le sommet d'un angle circonscrit à une ellipse, se meut sur une ellipse concentrique à la première, la corde menée par les points de contact, sera dans toutes ses positions, tangente à une troisième ellipse dont chacun des axes est une troisième proportionnelle à ceux de l'ellipse enveloppée et de l'ellipse directrice, qui se trouvent dans la même direction, proposition qu'on peut s'exercer à démontrer directement. MM. *Livet* et *Brianchon* démontrent ce théo-

rème curieux : étant données une surface courbe du second degré, et une surface conique circonscrite qui la touche, et dont le sommet soit en un point quelconque, si la surface conique se meut sans cesser d'être circonscrite à la première surface, et de la toucher, de manière cependant que son sommet parcourre une autre surface quelconque du second ordre, disposée arbitrairement dans l'espace, le plan de la courbe de contact de la première surface et du cône, touchera toujours une même troisième surface du second degré. M. *Brianchon* observe 1.° qu'il existe une relation remarquable entre la surface qui dirige le mouvement du sommet et celle que le plan de contact touche dans toutes ses positions, qui consiste en ce que lorsque la première est susceptible d'être engendrée par une ligne droite, la seconde jouit de la même propriété; 2.° que si le sommet de la surface conique, au lieu de parcourir une surface, se meut en glissant sur une courbe quelconque tracée dans l'espace, le plan de contact, dans toutes ses positions, touche une même surface développable, tandis que dans le premier cas, ce plan roulait sur une surface à deux courbures. Voyez le *Treizième cahier du journal de l'Ecole Polytechnique.*

J. G. G.

MÉCANIQUE.

Mémoire sur le principe des Vitesses virtuelles, présenté à l'Académie royale des sciences de Bruxelles, en décembre 1824. *Par M.* M. G. PAGANI.

EXTRAIT. — 1.er ARTICLE.

L'objet que l'auteur s'est proposé dans ce mémoire a été de donner une démonstration simple et rigoureuse du principe des vitesses vir-

tuelles, et d'en déduire d'une manière uniforme toutes les lois et toutes les propriétés générales de la mécanique. Il a divisé son travail en trois parties dont la première contient la démonstration du principe fondamental de la mécanique; la seconde partie est destinée à la recherche des propriétés générales de l'équilibre et du mouvement; et dans la troisième il détermine les fonctions qui jouissent de quelques propriétés remarquables en mécanique. Pour faire connaître la marche que l'auteur a suivie, et pour donner, en même-temps, une idée du mémoire que nous annonçons, nous allons parcourir successivement les trois parties pour en extraire la substance.

PREMIÈRE PARTIE.

Démonstration du principe des Vitesses virtuelles.

L'auteur démontre le principe des vitesses virtuelles, sans s'appuyer sur aucune considération qui ne soit pas évidente par elle-même. A cet effet, il examine d'abord le cas où le système en équilibre se réduit à un point libre dans l'espace et sollicité par autant de forces que l'on voudra. On sait d'ailleurs que tous les autres cas se ramènent facilement à celui-ci; par conséquent nous nous bornerons à faire connaître les raisonnemens de l'auteur dans l'hypothèse que nous venons de dire, d'autant plus que c'est principalement dans cette partie de la démonstration que l'on trouve les idées qui lui appartiennent exclusivement.

Soit d'abord le point m dont les coordonnées sont x, y et z, sollicité par une seule force dont l'intensité est P, et qui le tire dans le sens de la droite p, menée du point m à un autre point fixe dont les coordonnées constantes seront dénotées par a, b, c. L'action de la force dont il est question, consiste à faire varier la droite p d'une quantité proportionnelle à son energie P; et si l'on désigne cette variation par δp, on aura $\delta p = \omega P$, quantité infiniment petite et constante. En outre, puisque l'on a

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

il viendra

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x-a}{p}, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{y-b}{p}, \quad \frac{dp}{dz} = \frac{z-c}{p}.$$

Cela posé, il sera facile de trouver, en supposant que le point m se transporte sur la droite p à une distance δp de sa position primitive, que les variations δx, δy, δz de ses coordonnées seront exprimées comme il suit :

$$\delta x = \frac{dp}{dx}\,\delta p \quad , \; \delta y = \frac{dp}{dy}\,\delta p \quad , \; \delta z = \frac{dp}{dz}\,\delta p$$

Donc, si on considère les coordonnées du point m comme des fonctions de l'intensité et de la direction d'une force quelconque qui lui est appliquée, les variations de ces fonctions, dans le premier instant de l'action, seront données par les formules

$$\delta x = \frac{dp}{dx}\,\omega \mathrm{P} \quad , \; \delta y = \frac{dp}{dy}\,\omega \mathrm{P} \quad , \; \delta z = \frac{dp}{dz}\,\omega \mathrm{P}$$

Le même raisonnement étant appliqué aux autres puissances qui peuvent solliciter à la fois le point m, on parviendra à des résultats analogues ; d'où il suit que la variation totale de chaque coordonnée, considérée comme fonction des variables indépendantes P, Q, R, etc. qui représentent les intensités de ces forces, et des positions arbitraires des droites p, q, r, etc. qui expriment les directions des mêmes forces, sera

(1) .... $\left(\mathrm{P}\frac{dp}{dx} + \mathrm{Q}\frac{dq}{dx} + \mathrm{R}\frac{dr}{dx} + \text{etc.}\right)\omega$ pour x

(2) .... $\left(\mathrm{P}\frac{dp}{dy} + \mathrm{Q}\frac{dq}{dy} + \mathrm{R}\frac{dr}{dy} + \text{etc.}\right)\omega$ pour y

(3) .... $\left(\mathrm{P}\frac{dp}{dz} + \mathrm{Q}\frac{dq}{dz} + \mathrm{R}\frac{dr}{dz} + \text{etc.}\right)\omega$ pour z

En égalant séparément à zéro les expressions (1), (2) et (3), on aura les conditions nécessaires pour l'équilibre du point m. Ensuite en multiplant successivement les mêmes expressions par $\frac{dx}{\omega}$, $\frac{dy}{\omega}$, $\frac{dz}{\omega}$, et en ajoutant les produits, on pourra écrire la somme de cette manière très-simple,

(4) .... $\mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \text{etc.} = 0$,

équation qui aura nécessairement lieu lorsque le point m sera en équilibre. On voit par là comment le principe des vitesses virtuelles est démontré pour le cas que nous avons considéré.

Note sur l'influence du vent dans la propagation du son, par M. Van Rees, *professeur à l'Université de Liége.*

Les membres du bureau des longitudes de Paris, qui, en 1822, firent une nouvelle série d'expériences pour déterminer la vitesse du son, partirent du principe, que pour anéantir entièrement l'influence du vent, il suffit de produire deux sons pareils au même instant dans deux stations, et d'observer dans chacune d'elles, le temps que le son de la station opposée emploie à y parvenir; le vent produisant alors des effets contraires sur les deux vitesses, la *moyenne* des deux résultats leur parût être aussi exacte que si l'atmosphère avait été parfaitement tranquille (1).

Dans un entretien que j'eus avec M. *Van Beek* d'Utrecht, sur les nouvelles expériences qu'il fit en 1823, conjointement avec M. le professeur *Moll,* sur le même sujet, nous fûmes conduits à douter de l'exactitude de ce procédé, et bientôt le calcul suivant me confirma qu'il est en effet sujet à une erreur qui, quoique legère, mérite d'être remarquée et apprcciée (2).

Pour soumettre au calcul l'influence du vent sur la vitesse du son, nous considérerons le vent comme un mouvement uniforme de translation de toute la masse d'air dans laquelle le son se propage, en sorte que toutes les molécules d'air se meuvent dans des directions parallèles et avec des vitesses égales. Le son se propage dans cette masse d'air de la même manière que dans l'air tranquille; mais rela-

---

(1) Connaissance des temps pour 1825, pag. 361.

(2) M. *Van Beek* à qui je communiquai mes résultats, les fit insérer dans le *Letterbode*; ils ne seront cependant pas déplacés dans cette Correspondance plus particulièrement destinée à des lecteurs français.

Les expériences de MM. *Moll* et *Van Beek* sur la vitesse du son, sont insérées dans le 7.e *volume des Mémoires de la* 1.re *classe de l'Institut royal des Pays-Bas*, et dans le *dernier vol. des Transactions philosophiques de Londres.* Elles semblent par leur nombre et leur exactitude mériter la préférence sur celles faites par ordre du Bureau des longitudes. (Voy. le tom. I, pag. 288 de la *Corr.*)

tivement à des points fixes, son mouvement progressif se compose avec celui qui est dû au vent.

Soient A et B (*fig.* 17) les extrémités de la base, ou les stations dans lesquelles on produit les sons; et supposons que les parallèles CE, DF indiquent la direction du vent.

Admettons que le son se soit propagé dans l'air tranquille de A en C durant le temps t, mais que, dans le même temps, la molécule C ait été déplacée par l'action du vent et portée en B : il est évident que le son formé en A sera entendu par l'observateur placé en B, après ce temps t.

Admettons de même que durant le temps t' le son produit en B se soit propagé dans l'air tranquille de B en D, mais que, dans le même temps, le vent ait porté la molécule D en A : le son de B parviendra dans le temps t' à l'observateur placé en A.

Désignant donc par s la vitesse du son dans l'air en repos, par v celle du vent, faisant $AB = a$, l'angle $BAt = \varphi$, et conservant à t et t' leurs significations précédentes, on a

$$AC = st,\ CB = vt,\ BD = st',\ AD = vt'$$

maintenant les triangles BAC, BAD donnent,

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB.CB \cos. ABC$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD \cos. BAD;$$

c'est-à-dire, en substituant les valeurs ci-dessus,

$$s^2t^2 = a^2 + v^2t^2 - 2avt \cos. \varphi \ldots\ldots (1)$$
$$s^2t'^2 = a^2 + v^2t'^2 + 2avt' \cos. \varphi \ldots\ldots (2)$$

d'où, en éliminant s^2,

$$v = \frac{a(t'-t)}{2tt' \cos. \varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Puisque les quantités a, t, t', φ sont connues par l'observation, cette formule très-remarquable sert à calculer la vitesse du vent durant l'expérience : celle-ci étant connue, on aura s par une des équations (1) ou (2). Substituant dans (1) la valeur de v que nous venons de trouver, il vient

$$s = a\sqrt{\left(\frac{1}{tt'} + \frac{(t'-t)^2}{4t^2t'^2 \cos.^2 \varphi^2}\right)} \ldots\ldots (4)$$

ce qui fait connaître la vitesse exacte du son. On peut donner aussi à cette équation la forme plus simple

$$s = \sqrt{\left(\frac{a^2}{tt'} + v^2\right)} \dots\dots\dots\dots (5)$$

qu'on trouve directement en éliminant cos. φ entre (1) et (2).

Les savans français ont calculé s en divisant la longueur de la base par la moyenne arithmétique des temps observés. Selon eux on aurait par conséquent

$$s = \frac{a}{\frac{1}{2}(t' + t)}$$

valeur évidemment trop petite. Car la moyenne arithmétique étant toujours plus grande que la moyenne géométrique, on a......... $\frac{1}{2}(t' + t) > \sqrt{tt'}$, donc $\frac{a}{\frac{1}{2}(t'+t)} < \frac{a}{\sqrt{tt'}}$, et à plus forte raison

$$\frac{a}{\frac{1}{2}(t'+t)} < \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{tt'}} < \sqrt{\frac{a^2}{tt'}} < \sqrt{\frac{a^2}{tt'} + v^2}$$

Il ne sera pas difficile de déterminer par approximation l'erreur qu'on peut commettre en se servant de la formule $\frac{a}{\frac{1}{2}(t'+t)}$: à cet effet, retranchons (2) de (1), nous trouverons en divisant par $t' + t$

$$t' - t = \frac{2av \cos.\varphi}{s^2 - v^2} \dots\dots\dots\dots (6)$$

substituant cette valeur de $t' - t$ dans (3), on en déduit

$$tt' = \frac{a^2}{s^2 - v^2} \dots\dots\dots\dots (7)$$

Connaissant alors la différence et le produit de t et t' on trouve facilement leur somme

$$t' + t = \frac{2a\sqrt{s^2 - v^2 \sin.^2 \varphi}}{s^2 - v^2}$$

ce qui donne

$$\frac{a}{\frac{1}{2}(t'+t)} = \frac{s^2 - v^2}{\sqrt{s^2 - v^2 \sin.^2\varphi}} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right)s}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2 \sin.^2\varphi}{s^2}\right)}}$$

Or le rapport $\frac{v}{s}$ étant toujours très-petit, nous pourrons donc convenablement développer le coëfficient de s dans le second membre, suivant les puissances ascendantes de ce rapport, et négliger la 4.e puissance et celles qui suivent. Effectuant le calcul, on a

$$\frac{a}{\frac{1}{2}(t'+t)}=\left[1-(1-\tfrac{1}{2}\sin.^2\phi)\frac{v^2}{s^2}\right]s\ldots\ldots\ldots\ (8).$$

ce qui fait voir que l'erreur commise est à la vraie vitesse du son ou s, comme $(1-\frac{1}{2}\sin.^2\phi)\frac{v^2}{s^2}$ est à l'unité. Elle est donc proportionnelle au carré de la vitesse du vent et d'autant plus grande que l'angle ϕ s'approche plus de o.

Comme on n'est pas toujours le maître de choisir pour ses observations un temps calme, le rapport $\frac{v}{s}$ pourra facilement s'élever à $\frac{1}{50}$ et au-delà, ce qui correspond à une vitesse du vent de 6 à 7 pieds par seconde. La vitesse du son, calculée par la formule $\frac{a}{\frac{1}{2}(t'+t)}$ sera affectée dans ce cas, d'une erreur de $\frac{1}{2500}$ à $\frac{1}{5000}$, trop considérable pour être négligée. Aussi M. *Van Beek*, en calculant suivant cette formule et d'après ses propres expériences, la valeur de s, l'a trouvée constamment d'un à deux décimètres plus petite que celle que donne la formule exacte (4).

On pourrait objecter au calcul précédent, d'être fondé sur une hypothèse qui n'est pas toujours d'accord avec l'observation, savoir que le vent a dans toute l'étendue de la base la même direction et la même vitesse. Pour peu qu'on refléchisse cependant sur la nature de la question, on se convaincra que cette hypothèse est non seulement la plus simple, mais aussi la seule qui puisse être convenablement introduite dans le calcul, et que ses résultats peuvent être considérés comme approchant autant que possible de la vérité.

Il reste à observer rélativement à l'équation (3), qu'à cause des erreurs d'observation qui peuvent affecter $t'-t$, cette équation donne la valeur de v d'autant moins exacte que cos. ϕ est plus petit, et qu'elle est entièrement en défaut si cos. $\phi=o$, ou $\phi=90^\circ$. Pour qu'il fut permis d'employer alors la formule (5), on devrait pouvoir déterminer

d'une autre manière la vitesse moyenne du vent durant l'expérience, ce qui semble sujet à de grandes difficultés. Il est donc désirable que la direction du vent coïncide à-peu-près avec celle de la base.

ADDITION.

On trouve dans *la Bibliothèque de Genève*, cah. de novembre 1825, la traduction d'un mémoire de *W. Galbraith*, sur la vitesse du son, consigné dans le *Phil. Mag.*, année 1825. L'auteur, après un exposé rapide des recherches faites sur ce sujet, donne pour calculer la vitesse du son, cette formule qui embrasse les corrections de toute espèce

$$V = 1100 + 18{,}8(p'-p) + 1{,}14(t'-t) + 2{,}87(h'-h) + \omega \operatorname{Cos} \varphi$$

dans laquelle le nombre 1100 compte des pieds anglais, ce qui est la vitesse du son pour une hauteur barométrique $p = 30$ pouces, une temperature $t = 60^\circ$ *F.* et $h = 14^\circ$ de l'hygromètre de M. *Goldingham* : ainsi la formule devient par ces substitutions

$$V = 1100 + 18{,}8(p'-30) + 1{,}14(t'-60) + 2{,}87(h'-14) + \omega \operatorname{Cos} \varphi$$

où p', t' et h' sont les indications du baromêtre, du thermomêtre et de l'hygromêtre au moment de l'observation, φ l'angle que la direction du vent fait avec celle du son, et ω la vitesse du vent. L'auteur termine son mémoire en exprimant le vœu que les physiciens pourvus des instrumens les plus exacts, entreprennent des séries d'expériences dans des circonstances assez variées pour permettre de déduire de la seule observation les corrections dues à la température, à la pression de l'air, à l'humidité, à la direction et à la vitesse du vent, indépendamment de toute considération théorique. Ces élémens entrent dans la formule générale

$$V = v + \alpha(p'-p) + \beta(t'-t) + \gamma(h'-h) + \omega \operatorname{Cos} \varphi$$

où $v = 1100$ pieds, α désigne le changement de vitesse pour une variation d'un pouce anglais dans la hauteur du baromêtre, β celui qui a lieu pour un dégré du thermomêtre *Fahrenheit*, et γ celui qui correspond à un degré de l'hygromêtre (*). L'auteur, dans une note, dit

(*) Il serait à désirer que M. *Goldingham* donnât les moyens de comparer son hygromètre avec quelqu'autre hygromètre connu, par exemple, avec celui de M. *Daniels*, qu'on regarde comme un instrument exact.

que depuis que son mémoire à été rédigé, les expériences de M. le professeur *Moll*, d'Utrecht, sur le sujet qu'il traite, ont été publiées dans les *Transactions Philosophiques* (*) : il pense néanmoins que son travail peut encore être utile, et qu'il le sera d'autant plus sur le continent, que les expériences de M. *Moll* y sont beaucoup moins connues.

Dans le cahier de décembre 1825 (Bibl. Univ.), on trouve *la relation des expériences sur la vitesse du son, faites en Hollande, par MM. le professeur G. Moll, et le Dt. Van Beek, traduites des Phil. Trans.* 1823, *Part. II.* Parmi les causes de différence entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie, une des plus influentes, disent ces physiciens, est le vent qui accélère ou qui retarde cette vitesse, selon la direction suivant laquelle il souffle. Que l'on fasse naître le son au même moment aux deux extrémités d'une base, et que deux observateurs placés à ces deux extrémités, mesurent la vitesse avec laquelle le son parcourt la longueur de cette base, il est clair que l'action du vent augmentant l'une de ces vitesses, autant qu'elle diminue l'autre, la moyenne entre ces vitesses, sera celle qui aura lieu dans l'air tranquille. Les sons produits aux deux extrémités de la base, étaient ceux de coups de canon simultanés, dont la lumière et le bruit étaient aperçus aux deux stations. Cette simultanéité qu'il était très-difficile d'obtenir, et que ces physiciens ont pourtant obtenue, doit donner une grande confiance dans les résultats de leurs expériences. Le 27 juin 1823, vingt-deux coups de canon furent tirés simultanément et entendus aux deux extrémités d'une base de 17669,28 mêtres; on en conclut la vitesse du son $v = 340,06$ mêtres ou 1116,032 pieds anglais, par seconde. Dans les circonstances atmosphériques de ce jour, la formule (**) donnait $v = 335,14$ mêtres ou 1099,885 pieds angl. : diff. $= 4,92$ mêt. ou 16,147 pieds angl. Le 28 juin 1823, quatorze coups de canon simultanés, entendus aux deux stations, donnèrent une vitesse moyenne $v = 339,34$ mêt. ou 1113,669 pieds angl. par seconde : dans les circonstances atmosphériques de ce jour, la formule donna $v = 335,10$ mêt. ou 1099,753 p.

(*) Voy. le I.er vol. de la *Corr. Math. et Phys.* pag. 287 et suiv.

(**) Nous omettons la formule pour ne pas allonger cette addition.

angl. : diff. 4,24 mêt. ou 13,916 p. angl. En réduisant la vitesse du son à ce qu'elle serait dans un air parfaitement sec et à la température o° du thermomêtre centrale, la moyenne des résultats des expériences des 27 et 28 juin, est $v = 332{,}05$ mêt. ou 1089,744 pied. angl. Nous regrettons de ne pouvoir entrer dans plus de détails sur cet intéressant mémoire terminé par un tableau offrant les résultats des expériences sur la vitesse du son, faites par différens physiciens, et par la notice des ouvrages dans lesquels ces résultats sont consignés.

J. G. G.

MACHINES (*).

Description de l'Echelle-Brouette.

M. *Bonafoux* de Turin, a imaginé une *Echelle-brouette* qui peut trouver une application utile dans différens travaux : elle se compose de deux parties distinctes A et B (*fig.* 18) : la première A qui forme le corps de la Brouette, est composée de deux pièces de bois ou de brancards longs de 7 à 8 pieds, et réunis par quatre traverses ou échelons. La roue de la brouette, est fixée à l'une des extrémités, tandis que l'autre sert de poignée pour saisir et faire agir la brouette. La seconde partie B de la brouette, formée comme la première, mais sans roue et sans poignée, porte une traverse de plus, au moyen de laquelle elle se trouve fixée au corps de la brouette ; elle a environ 6 pieds de long. Pour convertir cètte brouette en échelle double, il suffit de la ployer et de la dresser sur le sol, comme on le voit (*fig.* 19). Il est bon d'observer que les extrémités inférieures qui portent la roue, doivent dépasser celle-ci d'un pouce environ ; car si la roue portait sur le sol, l'échelle ne pourrait pas rester dans une position fixe ; elle s'écarterait et tomberait sur place. Dans le cas où on a besoin d'une échelle simple et propre à être appuyée contre une muraille, ou contre un appui quelconque, on déploie totalement la brouette et l'on obtient l'échelle (*fig.* 20) lon-

(*) A l'avenir, nous consacrerons de temps à autre, un article à la description de quelques machines d'une exécution facile, et d'une utilité évidente ou déjà constatée.

gue de douze à treize pieds. Le quatrième échelon supérieur qui dépasse les côtés de l'échelle, en s'appliquant sur l'extrémité des manches de la brouette, donne une position fixe à l'échelle et l'empêche de fléchir. C'est au moyen de ce même échelon qu'on tient la partie supérieure de l'échelle, élevée au-dessus de la roue. On abaisse la roue et on élève la brouette au-dessus du sol. On conçoit tout le parti qu'on peut tirer de cette machine pour la récolte des fruits, la taille des arbres, etc.

J. G. G.

ASTRONOMIE.

Mémoire sur les calculs de l'orbite de la comète découverte le 19 *mai* 1825, *par M.* Gambart, *directeur de l'Observatoire royal de Marseille* (*).

La comète à laquelle se rapportent les observations que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, est celle qui s'est montrée en mai et juin dernier.

Lorsque je découvris cette comète, le 19 mai au matin, elle se trouvait un peu au-dessous de la tête de Cassiopée. Elle était petite et assez peu apparente dans la lunette de nuit, parceque, à raison du peu d'étendue de la nébulosité, elle ne différait guère d'une étoile. Les progrès rapides du crépuscule ne me permirent alors que de prendre une position à la machine parallactique, de laquelle il résultait que le nouvel astre se trouvait par $0^h\ 21^m$ d'ascension droite et 39° 36′ de déclinaison boréale; il était donc circompolaire.

(*) Ce mémoire a été lu dans une des séances de l'Académie royale des sciences de Paris : nous le devons à l'obligeance de l'auteur et à celle de M. *Bouvard*, qui a déjà enrichi ce recueil de plusieurs observations intéressantes sur les comètes.

A. Q.



Je pus, en effet, en reprendre les observations dès le soir, peu de temps après le passage inférieur.

La comète se trouvait alors sur le parallèle même de Cassiopée. Mais pendant ces premières observations, elle était si fort affaiblie par les vapeurs de l'horizon, qu'il fallût, dans l'impossibilité d'éclairer les fils du micromètre, recourir à l'usage des plaques.

Ces premières tentatives laissaient donc encore beaucoup à désirer : j'attendis quelques heures au bout desquelles la comète parvenue à une plus grande élévation, devint bien visible. Elle offrait l'apparence d'une petite nébulosité bien ronde, de deux minutes environ de diamètre, sans queue ni noyau; mais dont la lumière acquérait assez d'intensité vers le centre. Le pointé ne présentait plus de difficulté; aussi cette seconde observation de la nuit du 19 au 20, doit-elle être considérée comme ayant toute l'exactitude que comporte l'instrument qui était à ma disposition.

J'en puis dire autant des observations qui ont suivi, les circonstances étant restées à-peu-près les mêmes; il serait tout-à-fait inutile d'entrer ici dans le détail de chacune d'elles. On remarquera que la comète a toujours été rapportée à des étoiles très-peu éloignées en déclinaison. Cette condition qui est si essentielle dans tous les cas, le devient bien plus encore lorsque les déclinaisons sont considérables.

Dès l'origine, la comète se rapprochait du pôle; son mouvement continua de la porter vers ce point dont elle n'était plus distante, dans les premiers jours de juin, que de 9 ou 10 degrés. A la fin du même mois, elle avait déjà gagné le petit lion où elle s'est plongée dans les rayons du soleil, après avoir traversé en moins de 45 jours les constellations de Cassiopée, du Renne, le Camiléopard et la grande Ourse.

Mais la route géocentrique d'une comète n'offre, en général, qu'un médiocre intérêt : c'est seulement lorsque l'on a déterminé les circonstances de sa marche héliocentrique qu'elle prend comme place dans le système solaire. Il n'y a d'ailleurs que ce moyen de connaître si la comète observée ne s'est pas déjà montrée; et, sous ce rapport, cette recherche des élémens de l'orbite de toute comète nouvellement découverte, acquiert plus d'intérêt à mesure que nous avançons davantage.

Les premiers calculs de ce genre que j'ai entrepris à l'occasion de

la comète qui nous occupe, se fondaient sur les positions déduites des observations des 20, 21 et 22 mai, lesquelles sont, comme l'on voit, fort rapprochées, puisqu'il n'y a que 48 heures de la première à la dernière.

En appliquant à ces observations la méthode de M. *De Laplace*, je trouvai :

Instant du passage au périhélie, mai le 31,47 temps moyen compté de minuit à Marseille.

Distance périhélie.........	0,8 99
Longitude du périhélie.....	273°,29
Longitude du nœud......	17, 48
Inclinaison...............	57, 27
Mouvement rétrograde.	

Ces résultats se rapprochaient assez des élemens de la troisième comète de 1790, pour qu'il fut permis de concevoir quelqu'espérance sur l'identité des deux astres.

La nouvelle distance périhélie est bien, à la vérité, plus grande de dix centièmes d'unité; notre inclinaison se trouve moindre de six degrés; et il y a une différence de 16 degrés sur les deux nœuds. Mais cette nouvelle orbite qui ne se fondait que sur un arc parabolique de 3 degrés, pouvait éprouver des changements considérables. Le nœud semblait particulièrement susceptible d'une grande incertitude, attendu que la comète se trouvait précisément vers le maximum de sa latitude héliocentrique.

Jusque là, ces conjectures sur l'identité de deux astres étaient assez permises; et je pourrais, à cet égard, si cela était nécessaire, m'appuyer dans les antécédens d'autorités recommandables.

La solution de la question dépendait des observatious subséquentes, puisqu'elles seules pouvaient donner aux élémens de l'orbite cette certitude qui leur manquait, et qu'il était impossible d'obtenir le quatrième jour de l'apparition.

Or, ces observations, au lieu d'apporter dans les résultats du premier calcul, les modifications auxquelles il était permis de s'attendre, ont, au contraire, complètement confirmé ces résultats : elles ont montré de plus que l'hypothèse parabolique représente parfaitement la route du nouvel astre.

En fondant mes calculs sur cinq observations uniformément réparties sur un arc héliocentrique de 50°, je suis arrivé à la parabole suivante; passage au périhélie mai 1825, le 31, 0570 temps moyen compté de minuit à Marseille.

Distance périhélie............	0,889 130	Eq.e moyen 19 mai.
Longitude du périhélie........	273, 55. 41	
Longitude du nœud..........	20, 5. 43	
Inclinaison..................	56, 41. 10	
Rétrograde.		

Voici le tableau des erreurs géocentriques de cette orbite.

DATES.		ERREUR en LONGITUDE.	ERREUR en LATITUDE.
Mai	20	+ 43″	+ 29″
	23	+ 65	+ 41
	28	+ 44	+ 15
Juin	8	+ 5	+ 43
	14	— 21	+ 8
	18	+ 12	+ 25
	24	+ 22	— 2

Ces erreurs rentrent, comme l'on voit, à-peu-près dans les limites de celles dont l'observation elle-même est susceptible. Il serait encore possible, je pense, de les diminuer, attendu qu'elles ont toutes, à l'exception d'une seule, le même signe.

Toute hypothèse d'identité serait peut-être suffisamment démontrée inadmissible par cela seul que la parabole satisfait à l'arc de 50° de 1825, et qu'il reste une différence notable et bien établie, entre les deux orbites.

J'ajouterai pourtant encore, qu'avant d'être arrivé à cette dernière parabole, je m'étais proposé de rechercher directement s'il y avait lieu à une ellipse, et qu'elle était celle qui convenait. J'employai, pour cela, les observations des 20, 28 mai, 8 et 18 juin, qui me paraissaient, et me paraissent encore aussi exactes que possible. Or,

j'ai été conduit ainsi, non pas à une ellipse de 35 ans, ni à toute autre, mais à une hyperbole, et, en calculant de nouveau sur cette indication, dans l'hypothèse d'un mouvement hyperbolique, je suis parvenu à une excentricité de 1,015.

Je me bornerai à citer ce résultat, sans donner les autres élémens de cette hyperbole, ni sa comparaison aux observations. Une seule erreur s'élève à 1'. 15 sur la longitude, et toutes celles en latitude restent au-dessous d'une minute. La parabole conserve pourtant l'avantage. Je ne parle de ce résultat hyperbolique que pour faire voir combien le calcul direct est loin de conduire à une ellipse de 35 ans ou à toute autre d'un grand axe moindre. D'un autre côté, si l'on suppose, comme je l'ai fait, la révolution connue, et égale à l'intervalle qui sépare les passages de 1790 et 1825, ce qui revient à admettre l'identité, je crois que l'on trouvera, ainsi que cela m'est arrivé, des résultats qui infirmeront tout-à-fait l'hypothèse de départ.

Je ne me suis occupé jusqu'ici que des observations de cette année et du moyen de les représenter.

M. *Bouvard*, par des recherches opposées, me paraît avoir épuisé la question de manière à ne rien laisser à désirer.

Les observations de la 3.me comète de 1790 qu'a faites *Maskelyne*, offrent, sous le rapport de l'exactitude, toutes les garanties que peut désirer le calculateur le plus exigeant.

Elles embrassent en outre un arc héliocentrique de 97°, ce qui est très-avantageux pour les recherches tendantes à établir la différence entre la parabole et l'ellipse.

M. *Bouvard* a recherché si ces observations de 1790, n'indiquaient point une orbite elliptique, et par suite un retour. Or, la révolution que trouverait ainsi directement ce célèbre Astronome, est, par sa longueur, de l'ordre de celles sur lesquelles il n'est plus possible de compter.

Il résulte, je crois, de ce qui précède, que l'on ne saurait considérer sous aucun rapport, les comètes de 1790 et 1825 comme un seul et même astre; et que l'une et l'autre restent dans la classe générale de ces comètes sur le retour ou le non-retour desquelles nous ne paraissons point encore appelés à prononcer.

Cette dernière comète est la 188.me dont nous ayons l'orbite. Les travaux auxquels elle a dû donner lieu dans les autres observatoires,

n'ont point encore été publiés; il paraît seulement qu'elle n'a point été découverte ailleurs qu'à Marseille.

Messieurs *Carlini*, à Milan, et *Schumacher*, à Altona, ont commencé à l'observer vers la fin de mai. M. *Pons* l'a aussi vue le 2 juin, d'après l'avis que je lui en avais donné. J'espère que les observations d'Altona et de Milan, suppléeront avec avantage à ce qui manque à celles de Marseille. Relativement à ces dernières, la lacune du 28 mai au 8 juin, tient moins au mauvais temps, qu'à la mauvaise construction de l'instrument qui ne permet pas d'observer au-delà de 70° de déclinaison.

Addition à la note de M. GAMBART.

L'année 1825 a présenté dans un intervalle de temps très-court, quatre comètes différentes, celle dont il vient d'être question; celle à courte période de M. *Encke* ou la comète des douze cents jours, et celles que M. *Pons* a observées à Lucques les 15 juillet et 9 août. M. *Carlini* pense que ce n'est pas la grande comète, mais bien celle à courte période qui devait à cette époque avoir à-peu-près la même position géocentrique, que M. *Pons* a découverte le 15 juillet. Les élémens de l'orbite du premier de ces deux astres, ont été calculés par un grand nombre d'astronomes. M. *Gautier* de Genève, dans une notice fort intéressante (Bibl. univ. nov. 1825), a donné les résultats suivans auxquels il est parvenu, en employant trois observations de M. *Plana*.

Passage au périhélie décembre 10j.,456 t. m. à Paris.
Distance périhélie. . . . . 1 , 23273
Longitude périhélie . . . . . . 318°, 34′
Longitude du nœud . . . . 215°, 36′
Inclinaison . . . . 35°, 36′

Le baron *De Lindenau* de Gotha, a calculé la même comète dans l'hypothèse du mouvement elliptique, et en donnant à-peu-près les élémens précédens, il trouve que l'astre doit faire en 382 années juliennes, sa révolution dans une ellipse dont l'excentricité vaut 0,9765.

M. *Gautier* a aussi calculé les positions de cette comète pour quelques époques où cet astre pourra redevenir visible. Voici les résultats.

1826	asc. droite.	Décl. aust.	Distance au ☉.	Distance à la ♁.
1.er février	289° 25′	39° 52′	1, 474	2, 222
1.er mars	283 21	40 18	1, 730	1, 971
1.er avril	264 4	41 1	2, 052	1, 549
20 avril	241 28	37 24	2, 258	3, 392

Vers le 8 mai 1826, si la comète est encore visible, elle sera aperçue vers l'extrémité de la queue de l'Hydre; vers le 14 juillet de la même année, elle sera non loin de l'Epi de la Vierge.

A. Q.

PHYSIQUE.

Extrait d'un Mémoire sur l'action exercée par un circuit électro-dynamique, formant une courbe plane dont les dimensions sont considérées comme infiniment petites; sur la manière d'y ramener celle d'un circuit fermé, quelles qu'en soient la forme et la grandeur; sur deux nouveaux instrumens destinés à des expériences propres à rendre plus directe et à vérifier la détermination de la valeur de l'action mutuelle de deux élémens de conducteurs; sur l'identité des forces produites par des circuits infiniment petits, et par des particules d'aimant; enfin sur un nouveau théorème relatif à l'action de ces particules, lu à l'Académie royale des sciences dans sa séance du 21 novembre 1825. (Article communiqué par M. Ampère, de l'Institut de France.)

Le mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, est divisé en trois paragraphes. Dans le premier, j'ai considéré comme indéterminé l'exposant n de la puissance de la distance de deux éléments de conducteurs voltaïques, à laquelle leur action est réciproquement proportionelle, quand on suppose que cette distance varie sans que les angles qui déterminent la situation relative des deux élémens, éprouvent aucun changement. Cette première partie se termine par

un nouveau moyen de démontrer que l'action dont nous parlons, est dans ce cas réciproquement proportionnelle au carré de la distance, et je parviens aux résultats suivans :

1.° L'action produite par un circuit plan et infiniment petit, est indépendante de la forme de la courbe fermée qu'il décrit, et dépend seulement de sa position et de l'aire de cette courbe, à laquelle la force produite est proportionnelle (*).

2.° Dans le cas où le circuit infiniment petit est dans le même plan que l'élément sur lequel il agit, la force dont la direction est, comme on sait, perpendiculaire à l'élément, se trouve aussi dans ce plan, et sa valeur est simplement en raison inverse de la puissance $n+1$ de sa distance à un point déterminé de l'aire du circuit. On peut supposer, pour fixer les idées, que ce point est au centre de gravité du contour de cette aire.

3.° La force qui résulte de l'action de deux circuits infiniment petits situés dans un même plan, est dirigée suivant la droite qui en joint deux point déterminés, tels que leurs centres de gravité.

4.° Cette force est réciproquement proportionnelle à la puissance $n+2$ de la distance de ces deux points.

5.° Si l'on divise une aire quelconque en aires élémentaires dont toutes les dimensions soient infiniment petites, et qui la remplissent entièrement, et qu'on suppose des courants électriques de même intensité qui en parcourent dans le même sens tous les contours, les actions réunies de ces courants, équivaudront à un seul courant également intense, et décrivant seulement le contour de l'aire totale, puisque celui-ci se compose des seules parties des contours des aires élémentaires qui n'appartenant pas à deux de ces aires, ne sont pas, comme les autres, parcourues en sens contraires par deux courans de même intensité dont il ne peut résulter aucune action, d'après la première loi des phénomènes électro-dynamiques.

(*) J'ai déjà donné la démonstration de ce théorème à la fin du mémoire sur une nouvelle expérience électro-dynamique, sur son application à la formule qui représente l'action de deux élémens de conducteurs voltaïques, et sur de nouvelles conséquences déduites de cette formule, que je viens de publier chez *Crochard*, libraire, rue du Cloître-S.t-Benoit, n.° 16, et chez *Bachelier*, libraire, quai des Augustins, n.° 55.



6.° Pour avoir l'action qu'un circuit fermé et plan, quelles que soient sa forme et sa grandeur, exerce sur un élément de conducteur voltaïque situé dans le même plan, il faut élever à tous les points de l'aire du circuit, des perpendiculaires réciproquement proportionnelles aux puissances $n+1$ des distances de ces points au milieu de l'élément, calculer le volume compris entre cette aire, la surface du cylindre droit dont elle est la base, et celle qui passe par les sommets de toutes les perpendiculaires; c'est à ce volume que la force est proportionnelle : cette force est d'ailleurs dans le plan du circuit, et dirigée suivant la droite qui y est menée par le milieu de l'élément, perpendiculairement à sa direction.

7.° Deux circuits fermés quelconques, compris dans un même plan, s'attirent ou se repoussent suivant qu'ils sont parcourus en sens contraires ou dans le même sens, par un courant électrique; précisément comme si tous les points des aires qu'ils circonscrivent, supposées partout de même densité, s'attiraient ou se repoussaient en raison inverse de la puissance $n+2$ de la distance.

8.° Dans le cas où toutes les dimensions et les distances respectives des points homologues de ces deux circuits, deviennent plus grands dans un même rapport, leur action mutuelle augmente quand on suppose $n<2$, reste la même si $n=2$, et diminue lorsque $n>2$.

On a deux déterminations de la valeur de n, l'une déduite des expériences de M. *Biot*, d'après le nombre d'oscillations que fait un petit aimant par l'action d'un conducteur rectiligne indéfini à différentes distances du conducteur; l'autre repose sur l'expérience, due à MM. *Gay-Lussac* et *Velter*, qui constate la nullité d'action d'un anneau d'acier dont tous les points sont aimantés au même degré. Mais l'une et l'autre de ces deux déterminations, résultant d'expériences où l'on emploie des aimants, ne peuvent être étendues, rigoureusement parlant, à l'action mutuelle de deux conducteurs. Il était important de trouver un moyen pour déterminer la valeur de n, en partant d'observations faites directement sur des fils conducteurs. C'est à quoi l'on parvient d'une manière très-simple, en partant du dernier résultat que nous venons d'obtenir. Il suffit pour cela de construire un instrument composé de trois circuits semblables, circulaires, par exemple, dont les dimensions homologues forment une proportion continue, et disposés dans un même plan, de manière qu'ils puissent

se trouver compris entre les côtés d'un angle qui soient à la fois tangens à leurs trois circonférences. En rendant mobile celui du milieu, et en les faisant parcourir tous trois par un même courant électrique dont la direction soit telle qu'il y ait toujours répulsion entre les branches les plus voisines de trois conducteurs, afin que l'équilibre soit stable, on devra voir le circuit mobile s'arrêter dans la situation que nous venons d'indiquer, si $n=2$, s'éloigner davantage du plus grand des deux circuits fixes, si $n<2$, et du plus petit, si $n>2$.

D'après les déterminations que je viens de rappeler, et l'ensemble des faits relatifs à l'analogie qu'on retrouve partout entre l'action des conducteurs et celle des aimans, sous le point de vue sous lequel je les ai rapprochés, on ne peut douter que ce ne soit le premier de ces trois cas que l'expérience vérifie. Mais pour que les lois de l'action électro-dynamique fussent démontrées par les faits seuls et d'une manière absolument indépendante de toute hypothèse, il serait bien à désirer que cette expérience fut faite avec un instrument susceptible de toute la précision qu'on peut désirer : tel est celui que je vais décrire (*fig.* A).

Aux deux point A et A′ de la table *mn* sont deux cavités remplies de mercure : dans la première, plonge un conducteur ABCDEFG dont la partie CDE est circulaire et dont les deux autres parties ABC et EFG sont recouvertes de soie pour être isolées l'une de l'autre.

En G ce conducteur communique avec un tube en cuivre HG, surmonté d'un arc HI, terminé par une coupe I remplie de mercure. Dans cette coupe plonge un conducteur IKLMNPQRS dont la partie MNP est circulaire, et le reste enveloppé de soie. Il est mobile autour de la verticale qui passe par les deux points I et S, et le cercle MNP est maintenu horizontal au moyen d'un contrepoids *a*. La pointe S de ce conducteur plonge dans une coupe soutenue par une tige en cuivre ST qui communique au conducteur TUVXYZA′ dont la partie VXY est circulaire et le reste entouré de soie.

Les rayons des trois cercles O, O′, O″, forment une proportion continue dont le rapport est arbitraire.

Cela posé, si l'on plonge le rhéophore positif en A et le rhéophore négatif en A′, le courant suivra la route ABCDEFGHIKLMNPQRSTUVXZA′ Le cercle O′ sera donc repoussé par les deux cercles O et O″ et l'expérience fait voir qu'il reste en équilibre lorsque les distances OO′

$O'O''$ des centres respectifs des trois cercles, sont dans le même rapport que les rayons de deux cercles consécutifs. L'instrument est construit de manière que, dans cette position, les trois centres soient en ligne droite; de sorte que le système des deux cercles O et O' est semblable au système des deux cercles O' et O''; et le rapport de toutes les lignes homologues des deux systèmes, est encore le même que celui de deux rayons consécutifs.

Lorsque la valeur de *n* est ainsi déterminée, on doit, dans l'énoncé des théorèmes précédens relatifs à l'action d'un circuit plan sur un autre circuit situé dans le même plan, remplacer les expressions *puissance* $n+1$, *puissance* $n+2$, par celles de *troisième* et de *quatrième puissance*.

Il est à remarquer au reste que la manière que je viens d'indiquer pour déterminer la valeur de *n*, pouvait être conclue de ce que l'action mutuelle de deux élémens de courans électriques, étant nécessairement proportionnelle au produit des longueurs de ces élémens, et représentée par ce produit multiplié par une fonction des angles qui en déterminent la position et divisé par la puissance *n* de leur distance, le nombre des dimensions des valeurs des doubles intégrales qui expriment les forces résultantes de l'action mutuelle de deux circuits, est nécessairement $2-n$; en sorte que quand on suppose que toutes les dimensions des deux circuits augmentent ou diminuent dans le même rapport sans que les angles changent, il faut bien que l'action soit, comme nous venons de le voir d'une autre manière, proportionnelle à la puissance $2-n$ de ce rapport; si l'action reste la même; il faut donc que $n=2$.

Dans le second paragraphe de mon mémoire, j'ai donné constamment à *n* cette valeur, et j'ai d'abord calculé l'action qu'exercent deux circuits fermés, formant l'un un secteur de cercle, et l'autre une demi-circonférence de même rayon que le secteur, jointe au diamètre qui en réunit les deux extrémités. Il est aisé de mesurer exactement cette action à l'aide d'un instrument où deux conducteurs mobiles en demi-cercle sont soumis à l'action de deux conducteurs fixes en forme de secteurs dont l'angle au sommet n'est pas le même, ainsi que je l'ai expliqué dans le mémoire que j'ai présenté à l'Académie, le 12 septembre dernier, soit par la torsion d'un fil, soit par les nombres des oscillations que font en même temps les deux conducteurs. Voici une description abrégée de cet instrument.

Aux deux points a et a' (*fig.* B) de la table mn, s'élèvent deux supports ab, $a'b'$ dont les parties supérieures cb, $c'b'$ sont d'une matière isolante ; ils soutiennent une pièce de cuivre H$dee'd'$H' formée avec une lame pliée en gouttière suivant la droite HH', et terminée par deux coupes H et H' remplies de mercure. Aux points A, C, A', C' de la table sont quatre cavités remplies aussi de mercure. De A part un conducteur en cuivre AEFGRSQ, soutenu par HH' et terminé par une coupe Q. De A' il en part un second symétrique A'E'F'GS'R'Q'. Ils sont tous les deux entourés de soie pour être isolés l'un de l'autre et du conducteur HH'. Dans la coupe Q plonge la pointe d'un conducteur mobile QPK''LMNKIH revenant sur lui-même de K en I, et ayant dans cette partie ses deux branches entourées de soie. Il est terminé par une seconde pointe plongée dans la coupe de mercure H ; NML est un demi-cercle dont NL est le diamètre et K le centre. La tige PK''p est verticale et terminée en p par une pointe retenue par trois cercles horizontaux B, D, V, qui peuvent tourner autour de leurs centres, et sont destinés à diminuer le frottement.

YT est une tablette fixe qui reçoit dans une rainure un conducteur AUigfZhgiOzC, revenant sur lui-même de g en O, et doublé de soie dans cette partie.

La partie fZhg est un secteur de cercle qui a pour centre le point Z ; la partie go est rectiligne ; elle traverse en i le support ab dans lequel on a pratiqué une rainure verticale. En o les deux lames se séparent et vont plonger respectivement dans les coupes A et C. La partie de l'instrument située à droite de FG, est entièrement symétrique de celle que nous venons de décrire ; les points correspondans en sont marqués dans la figure par les mêmes lettres accentuées.

Cela posé, si l'on plonge le rhéophore positif de la pile en C, et le négatif en C', le courant électrique parcourra le conducteur C$zogh$ZfgU AEFGRS ; de là il passera dans le conducteur mobile QPK''LMNKIH, et se rendra en H' : il parcourra ensuite le conducteur mobile symétrique H'I'K'N'M'L'K'''P'Q', arrivera en Q', suivra le conducteur Q'S'R'GF'E'A' et arrivé en A, il suivra le conducteur A'U'$i'f'$Z'$h'g'i'o'z'$C', et de C' passera dans le rhéophore négatif, le courant allant dans la direction NL dans le diamètre NL et de h en k, puis de k en f, dans les rayons kN et Zf ; de plus le circuit fermé fZhgf ne produisant, comme on le sait, aucune action sur le demi-cercle LMN dont le

plan est perpendiculaire sur la droite fixe PK″ menée par son centre, le conducteur mobile ne pourra être mis en mouvement que par l'action du secteur *ghZfg* sur le diamètre NL, vu que, dans toutes les autres parties de l'appareil, passent deux courants opposés dont les actions se détruisent. L'équilibre aura lieu quand le diamètre NL fera des angles égaux avec les rayons *Zf* et *Zh*; et si on l'écarte de cette position, il oscillera par l'action seule du secteur *ghZfg* sur le diamètre LN, et le nombre des oscillations déterminera l'intensité de cette force pour qu'on voie si elle change avec l'angle du secteur, conformément aux résultats du calcul.

Je détermine ensuite, toujours pour le cas de $n=2$, l'action qu'un circuit dont toutes les dimensions sont infiniment petites, exerce à un point situé hors de son plan, en supposant que ce point est celui dont les coordonnées sont x, y, z, et en prenant pour l'axe des z la perpendiculaire élevée sur le plan du petit circuit par un point déterminé de l'aire qu'il circonscrit, tel que le centre de gravité de son contour : je trouve ainsi :

1.° Que la droite que j'ai désignée sous le nom de normale au plan directeur de l'action électro-dynamique au point que l'on considère, est dans le plan abaissé de ce point perpendiculairement sur celui du petit circuit;

2.° Que cette droite est située relativement à ce dernier plan, comme la ligne d'inclinaison de l'aiguille aimantée l'est, en général, à l'égard de l'équateur magnétique de notre globe; c'est-à-dire qu'elle forme avec la droite menée du point que l'on considère à l'origine, un angle dont la tangente est la moitié de celle que la même droite fait avec l'axe des z.

Je donne ensuite les formules qui expriment les trois forces que produit l'action d'un circuit infiniment petit 1.° sur un élément de conducteur voltaïque, parallèlement à trois axes rectangulaires dont un est élevé perpendiculairement sur le plan du circuit et passe par un point déterminé de son aire, pris pour l'origine des coordonnées; 2.° sur un autre circuit plan dont toutes les dimensions sont aussi infiniment petites. La difficulté qu'offraient ces calculs venait de la nécessité de ne conserver dans les formules, pour toute quantité infiniment petite, que les aires des deux circuits, puisque les forces cherchées doivent être indépendantes de leurs formes. Je suis par-

venu à mettre les valeurs de ces forces sous une forme qui satisfait à cette dernière condition, par une application particulière de la méthode des variations aux questions de ce genre, application que je crois entièrement nouvelle.

Dans le troisième paragraphe, j'ai considéré les effets qui doivent résulter, non plus de l'action des courans électriques, mais de ceux qui seraient produits par des assemblages de deux sortes de points agissant les uns sur les autres, comme on admet dans la théorie des deux fluides magnétiques, qu'agissent les points qu'on désigne sous le nom de molécules de fluide austral et fluide boréal. En supposant, comme on le fait dans cette théorie, que dans un espace extrêmement petit où se trouve un de ces points, il y a toujours un autre point de l'espèce opposée, qui attire ce que l'autre repousse, et *vice versa*, avec une force dont l'intensité est la même pour les deux points, et décroît d'ailleurs en raison inverse du carré de la distance. Pour éviter les circonlocutions dans la comparaison que je me propose de faire ici entre les conséquences auxquelles on est conduit, lorsqu'on admet l'existence de ces molécules, et celles qui se déduisent de la considération des courans électriques formant des circuits plans infiniment petits, je donnerai le nom d'élément magnétique à l'assemblage de deux points doués des propriétés dont je viens de parler; je désignerai ces points sous celui de pôles de l'élément magnétique, et j'appellerai axe du même élément la droite qui les joint. J'ai considéré d'abord deux élémens magnétiques dans une situation quelconque: j'ai pris le milieu de l'axe d'un de ces élémens pour l'origine des coordonnées x, y, z, et ce même axe pour celui des z; j'ai calculé les forces parallèles aux trois axes qui résultent de l'action mutuelle des deux élémens magnétiques, et en comparant les valeurs de ces forces avec celles que j'avais obtenues dans le paragraphe précédent pour les trois forces produites par l'action mutuelle de deux circuits infiniment petits, après avoir fait $n=2$ dans ces dernières, j'ai trouvé qu'en supposant les axes des deux élémens magnétiques, normaux aux plans des deux circuits, et les milieux de ces axes dans des points déterminés des aires que circonscrivent les mêmes circuits, on avait dans les deux cas des valeurs qui ne différaient qu'en ce que le coefficient constant qui entre dans ces valeurs, était $\frac{1}{2}\, ii'\lambda\lambda'$, i et i' étant les intensités des deux courans, λ et λ' les aires qu'ils entou-

rent, lorsqu'il s'agit de l'action mutuelle des deux circuits, tandis que quand on prend les valeurs des forces produites par l'action mutuelle des deux élémens magnétiques, le même facteur est $\mu\mu'\delta\rho\,\delta\rho'$, en nommant μ, μ' les intensités des forces attractives et répulsives des pôles de ces élémens, et $\delta\rho$, $\delta\rho'$ les longueurs de leurs axes.

Ce résultat établit complètement l'identité de tous ceux qu'on peut déduire des deux espèces de considérations par lesquelles on a expliqué les phénomènes électro-dynamiques, identité qu'on pourrait déjà déduire quoique d'une manière moins directe des calculs de M. *Savary*, et de ceux qu'on trouve dans mon *Précis de la Théorie des phénomènes électro-dynamiques*.

Mais ce n'est pas là le seul avantage de ce résultat général : il montre non-seulement comment on doit disposer des circuits électriques fermés, pour qu'ils produisent exactement les mêmes effets que les aimants considérés ainsi qu'on le fait ordinairement comme composés de molécules de fluides austral et boréal, c'est-à-dire d'élémens magnétiques, mais encore, ce qui est beaucoup plus important, comment il faut disposer des élémens magnétiques, pour qu'il en résulte précisément tous les effets des conducteurs voltaïques formant des circuits fermés de forme invariable. C'est à cette question que je me suis d'abord appliqué, et j'ai terminé mon mémoire par quelques recherches sur la manière dont on pourrait étendre les mêmes considérations au cas où les conducteurs ne forment pas des circuits solides fermés, et où l'on observe le singulier phénomène du mouvement de rotation continue.

D'après ce qui a été dit dans le premier paragraphe au sujet de la possibilité de remplacer, sans qu'il en résulte aucun changement dans l'action que produit un circuit fermé et plan quelconque, par autant de circuits infiniment petits, de même direction et de même intensité, que l'on conçoit de parties dans l'aire du premier, on est conduit naturellement à remplacer de même un circuit fermé, mais dont toutes les parties ne sont pas dans un même plan, par des circuits infiniment petits, de même direction et de même intensité, situés sur une surface quelconque terminée de toutes parts au premier circuit. Il est bien évident que les seules parties de ces petits circuits, dont l'action n'est pas détruite par les parties des circuits voisins avec lesquelles elles coïncident, sont précisément celles dont se compose

le circuit total. Or, celui-ci ne changeant pas, on peut donner à la surface dont il est le contour, toutes les formes qu'on veut : l'action des circuits infiniment petits disposés sur cette surface de la manière que je viens de le dire, est donc indépendante de sa forme, et on peut la faire varier sans que l'action change, pourvu que le contour de cette surface reste le même.

Il m'était alors aisé de prévoir, d'après ce que j'avais démontré dans le second paragraphe de ce mémoire, que la même indépendance de la forme de la surface, doit avoir lieu à l'égard de l'action exercée par des élémens magnétiques, normaux aux plans des petits circuits qui peuvent leur être substitués. De là résulte un théorème bien remarquable relatif à ces élémens, et que j'ai démontré directement d'après la seule considération des forces qu'on attribue dans l'hypothèse des deux fluides magnétiques aux molécules du fluide austral et à celles du fluide boréal.

Ce théorème consiste en ce qu'en partant des forces attribuées aux deux pôles des élémens magnétiques, on trouve 1.° que si à tous les points d'une surface de forme quelconque, on conçoit des élémens magnétiques dont les axes aient leurs milieux dans cette surface et soient dirigés suivant les normales, et dont les intensités multipliées par les longueurs donnent des produits égaux pour toutes les portions de la surface dont l'aire est la même, l'action exercée par ces élémens sur le pôle d'un autre élément que l'on peut considérer comme l'origine des coordonnées auxquelles on rapporte la surface, est absolument indépendante de la forme de cette surface, qu'elle est toujours nulle quand celle-ci est fermée et termine de toute part l'espace qu'elle renferme, et que, dans le cas contraire, la même action dépend seulement de la forme du contour qui circonscrit la surface. 2.° Que les trois composantes de l'action totale suivant les trois axes, sont respectivement proportionnelles aux sommes des quotiens des projections des aires dont le sommet est à l'origine, et qui ont pour bases les arcs infiniment petits dont se compose le contour, divisées par les cubes des distances de ces arcs à l'origine. On sait que j'ai trouvé, dans le *Précis de la Théorie des phénomènes électro-dynamiques*, en partant d'une formule uniquement déduite de l'expérience, des expressions semblables pour les trois forces qui résultent dans les mêmes directions, de l'action d'un circuit fermé sur le pôle d'un élément

magnétique ; et comme la même chose doit se dire de toutes les surfaces qui ont ce circuit pour contour, on peut considérer l'action qu'il exerce comme due à des élémens magnétiques, disposés dans l'espace suivant des lignes d'aimantation qui coupent partout à angles droits les surfaces dont nous venons de parler, avec cette seule condition que l'intensité des élémens magnétiques multipliés par les longueurs de leurs axes, donnent des produits égaux pour des portions égales d'une même surface.

Soit qu'on suppose que chaque élément magnétique doit l'action qu'il exerce à deux molécules, l'une de fluide austral, l'autre de fluide boréal, ou que cette action résulte du courant éléctrique formant dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'élément, un circuit infiniment petit, le résultat purement mathématique que je viens d'énoncer, subsiste, et on ne peut guère se dispenser d'en conclure, dans les deux manières d'expliquer les phénomènes que présentent les conducteurs voltaïques, que l'action exercée par ces conducteurs est produite par la formation, dans l'espace environnant, des élémens magnétiques dont je viens de parler ; sur-tout si l'on se rappelle une expérience que j'ai faite à Genève, en 1822, et celles par lesquelles M. *Becquerel* a généralisé et complété le résultat que j'avais obtenu, savoir que le courant électrique imprime en effet à tous les corps l'espèce d'aimantation dont il est ici question, aimantation qui disparaît dès que le courant est interrompu.

D'autres physiciens ont cherché à représenter l'action des fils conducteurs par des distributions d'élémens magnétiques propres à les produire ; mais leurs travaux n'ont eu aucun résultat, parce qu'ils plaçaient les élémens magnitiques, les uns suivant les diamètres des fils dans deux direction perpendiculaires entre elles, hypothèse repoussée par une expérience bien connue de M. *Œrsted ;* les autres suivant les circonférences des mêmes fils, tandis que l'expérience déjà citée de MM. *Gay-Lussac* et *Velter* démontre qu'alors ils n'exerçaient aucune sorte d'action. Il fallait suivre la marche toujours appuyée sur l'expérience, dont je ne me suis point écarté dans mes recherches sur ce sujet, pour être conduit à disposer, comme je viens de le dire, des élémens magnétiques dans l'espace où se trouve le circuit voltaïque, de manière qu'ils produisent exactement les effets observés. Qui ne voit d'ailleurs que, quand même on aurait eu cette idée, on

n'aurait eu aucun moyen de la vérifier, si je n'avais pas déduit de la seule observation des faits, les lois de l'action électro-dynamique et les valeurs des forces qui en sont une suite nécessaire? ces lois et ces valeurs ainsi établies, indépendamment de toute hypothèse, subsistent nécessairement, quelle que soit la théorie qu'on adopte, ou plutôt elles sont comme la pierre de touche de toutes les théories qui se trouvent appuyées sur les faits, dès qu'elles conduisent aux valeurs déterminées d'avance pour les forces, et inadmissibles quand elles en donnent d'autres.

A l'égard des phénomènes qu'on observe quand une partie du circuit voltaïque est mobile séparément, sans former elle-même un circuit presque fermé, il est aisé de voir que la répulsion mutuelle des élémens magnétiques normaux aux surfaces qui ont pour contour le circuit total y comprise la pile, doit tendre à le dilater en établissant une répulsion, apparente si l'on veut, soit entre les diverses parties d'une portion rectiligne, soit entre les deux côtés d'un angle que le courant parcourt, en allant vers le sommet de cet angle dans l'un, et en s'en éloignant dans l'autre.

De là résulte le phénomène de rotation tel qu'on l'observe, et cette rotation tend toujours à s'accélérer, parce qu'à mesure que la partie mobile se déplace, il se forme de nouveaux élémens magnétiques dans l'espace environnant, en sorte que les forces attractives et répulsives qui en émanent, dépendent du temps: ce qui suffit, comme on sait, pour qu'il n'y ait plus lieu au principe de la conservation des forces vives, tel qu'on le conçoit communément. Mais si l'on voulait continuer d'expliquer les phénomènes produits par les aimans et par les conducteurs voltaïques, en supposant deux fluides magnétiques différens de l'électricité et dont les molécules se disposeraient dans le cas des conducteurs de la manière que je viens d'indiquer, il resterait à dire comment le courant électrique agit sur elles et leur donne une si singulière disposition; tandis qu'en n'admettant dans ces phénomènes que de l'électricité en mouvement agissant, comme le prouve l'expérience, conformément aux lois que j'ai établies et à la formule qui en résulte, on voit sur le champ que le courant électrique du fil conducteur, doit imprimer aux particules de fluide neutre répandues dans l'espace, un mouvement de rotation qui se propage de proche en proche suivant les surfaces dont je viens de

parler, et dont il résulte autant de courans électriques infiniment petits, qu'il y a de ces particules, puisqu'elles sont chacune composées de molécules d'électricité positive et de molécules d'électricité négative. Cette manière de concevoir les effets des conducteurs voltaïques rend également raison de ceux que produisent les aimans, et donne pour ces derniers les deux lois connues de l'action mutuelle de deux aimans, et de l'action d'un aimant sur un fil conducteur. Seulement ces lois ne sont plus le résultat d'une force inhérente aux prétendues molécules du fluide austral et du fluide boréal, mais résultent des mouvemens que les courans électriques impriment aux particules du fluide formé par la réunion des deux électricités, et de la manière dont ces particules réagissent en vertu de ces mouvemens sur les corps où les courans sont établis. J'avais annoncé dans mon Recueil d'observations électro-dynamiques que de tels mouvemens étaient la cause la plus probable des phénomènes dont il est ici question. Les nouveaux résultats contenus dans ce mémoire, tendent à confirmer cette opinion, et à nous mettre sur la voie qui doit nous conduire à la détermination complète de ces mouvemens, et à l'explication de tous les effets qu'ils produisent.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Académie royale des Sciences et Lettres de Bruxelles.

Le troisième volume des nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Lettres de Bruxelles, vient de paraître : il renferme sept mémoires de mathématiques.

Le premier ayant pour titre : *Recherches sur la solution des équations numériques*, est de M. *G. Dandelin,* Professeur extraordinaire à l'Université de Liège. Dans son introduction, l'auteur s'exprime ainsi : « Tel qu'il est, ce mémoire contient plusieurs choses que je » crois neuves (opinion que nous partageons) ; d'autres qui le sont » moins, mais que j'ai présentées sous un nouveau jour : en général, » j'ose croire qu'il sera lu avec quelqu'intérêt par les Géomètres qui » ne dédaignent pas ce genre de recherches, qui offre plus d'utilité » et de difficulté qu'il ne porte avec lui d'éclat et d'honneur. Je l'ai » divisé en trois parties ; dans la première, il est question des racines » réelles des équations, du moyen de découvrir leurs limites, et d'approcher ensuite indéfiniment de leurs valeurs. Dans les deux autres » qui feront l'objet d'un nouveau travail, je traiterai de la recherche » des racines imaginaires des équations et de la résolution des équations simultanées à deux variables ».

Dès que notre collègue aura rempli ses engagemens, nous nous empresserons de faire sur son travail un rapport détaillé qui pourra faire suite à l'excellente *analyse du Traité de la Résolution des équations numériques de* J. L. Lagrange, *par* L. Poinsot, publiée en 1808, dans laquelle nous nous étonnons qu'il ne soit fait aucune mention des recherches de M. *Budan,* sur le même fond.

Suit un autre mémoire du même Géomètre *sur l'Hyperboloïde de révolution et sur les Hexagones de* Pascal *et de M.* Brianchon. Il

retombe d'abord sur une belle propriété des sections coniques, démontrée long-temps auparavant par M. *Quetelet,* dans ses recherches sur la focale. Il démontre 1.° que deux sphères tangentes à l'hyperboloïde, étant données, si l'on mène un plan P tangent en F et *f* à ces deux sphères, il coupera l'hyperboloïde suivant une courbe analogue aux sections coniques, dont les foyers seront F et *f* : 2.° que par toute section conique, on peut mener une hyperboloïde de révolution : 3.° que dans l'hexagone gauche tracé sur l'hyperboloïde, les plans des angles opposés se rencontrent deux à deux suivant trois droites situées dans un même plan ; 4.° que si dans l'hexagone gauche, on mène les trois diagonales qui joignent les sommets des trois couples des angles opposés, ces trois diagonales passent par le même point. Ce beau mémoire offre comme cas particuliers les théorèmes de *Pascal* et de M. *Brianchon* (*).

Sous le titre *Physique mathématique,* on trouve un mémoire de M. *Quetelet, sur une nouvelle manière de considérer les caustiques produites soit par la réflexion soit par la réfraction :* l'auteur le divise en deux parties : 1.° *Catoptrique :* 2.° *Dioptrique :* il est suivi de notes et d'observations. Le fond de ce mémoire étant déjà connu par ce qui en a été dit dans le premier volume de la *Correspondance,* nous nous dispenserons d'en offrir une analyse que notre amitié pour l'auteur rendrait peut-être suspecte, et qui venant d'une autre source, paraîtra plus franche, sans être moins honorable. (Voy. les Ann. math. de M. *Gergonne,* pag. 345 et suivantes, Vol. 15, et pag. 1, Vol. 16.)

M. le commandeur *De Nieuport* a traité une question relative au *Calcul des Probabilités,* laquelle a pour énoncé : *en supposant que dans une urne, on ait mis un nombre* n *de boules marquées chacune d'un des caractères* 1, 2, 3..... n, *et que chaque fois on en tire une seule qu'on remet aussitôt dans l'urne, on demande en combien de tira-*

(*) On trouve une analyse étendue de ce mémoire dans les Annales math. de Nismes : son savant rédacteur M. *Gergonne,* m'y attribue le théorème III qui est de M. *Dandelin* : M. *Hachette* me l'a également attribué dans un bulletin de la Société philomatique de Paris (voy. page 355 du I.er vol. de la Corr. math.). Le théorème I seul m'appartient, comme du reste la remarque en a été faite par M. *Dandelin,* dans le même mémoire.

A. Q.

ges, on peut parier à égalité de faire sortir toutes les boules. Cette question rentre dans le problême que donne M. *Lacroix,* à la pag. 33 de son *Traité élem. des Probabilités.* En désignant par y le nombre des tirages qui remplissent la condition énoncée, l'auteur est amené à la résolution de l'équation

$$Aa^y + Bb^y + Cc^y + \ldots\ldots + Mm^y = 0 \ldots. \quad (A)$$

dans laquelle les coefficiens sont des fonctions connues du nombre *n* des boules, et il observe qu'il n'a réussi qu'à échanger une difficulté contre une autre qui n'est peut-être pas moindre, quoique cependant il y ait quelque chose de gagné. Dans un ouvrage ayant pour titre : *Un peu de tout* ou *Amusemens d'un sexagénaire,* publié en 1818, M. le commandeur, dans une série de *conversations sur la Théorie des Probabilités* ou *Jeux de hasard* (*), discute plusieurs des questions qui s'y rapportent avec la sagacité qu'on lui connaît, et dont il a laissé tant de preuves dans les nombreux mémoires consignés dans ses *Mélanges mathématiques* et dans *les collections académiques de Bruxelles.* Cet illustre vieillard, le Nestor des Géomètres, l'honneur de notre Académie, termine le mémoire en question par ces vers :

Hic me luctantem frustra octogesimus annus
Occupat; hic artem, invitus, pennamque repono;
Nunc onus excipiant quibus est integra juventus;
Me jubet hic ætas studiis inponere finem.

que nous ne regardons pas comme son dernier adieu aux sciences.

M. le commandeur a invité son collègue M. *Dandelin,* a appliquer sa méthode à la résolution de l'équation (A), c'est-à-dire, à l'approximation de ses racines réelles. Comme la proposée ne rentre pas dans le type général des équations, M. *Dandelin* a été obligé de lui faire subir une suite de transformations qui l'ont amené à cette conclusion remarquable et que nous croyons n'être pas connue, savoir : *que le nombre des racines réelles d'une équation dont l'inconnue est en exposant, ne peut excéder le nombre de ses termes.* A l'aide de ces transformations, on peut toujours et sans beaucoup de peine, dit l'auteur, résoudre la proposée, du moins quant à ses racines réelles. Mais pour

(*) M. *Ampère* a traité cette matière avec beaucoup de détails, dans un écrit qui a pour titre : *Considérations sur la théorie mathématique du jeu,* imprimé à Lyon, en 1802.



ne pas trop allonger cette note additionnelle, M. *Dandelin* se borne à l'exposition de la méthode. Nous saisissons cette occasion d'annoncer que, dans le troisième supplément à son mémoire, M. *Dandelin* a traité par sa méthode, l'équation de *Kepler*, savoir : $\varphi = x + p \sin. x + q = 0$, en prenant pour exemple $x - \frac{5}{4} \sin. x - 4 = 0$, et, après un petit nombre d'opérations qui s'exécutent facilement, il arrive à ces deux limites de l'arc x, savoir : $x = 202^\circ 8' 30''$ et $202^\circ 11' 50''$, qui déjà ne diffèrent plus de $4'$. En faisant encore une opération semblable, on pousse l'approximation jusqu'aux dixaines de secondes, dernière limite des erreurs qu'on peut commettre avec les cinq décimales employées. Il est à remarquer, ajoute ce Géomètre, que pour cette équation, la difficulté et la longueur des calculs n'augmentent pas avec le degré d'approximation qu'on veut obtenir.

M. *A. Quetelet* a donné dans le I.er volume de la *Correspondance*, pag. 138 et suiv., un extrait de son mémoire *Sur quelques constructions graphiques des orbites planétaires*, qui est le sixième du volume dont nous rendons compte (*). Ainsi notre tâche est toute faite quant au corps de ce mémoire; mais nous en extrairons la note suivante, parce qu'elle se rattache à un article de notre collaborateur inséré au I.er vol. de la *Correspondance*, pag. 67 et suiv. : « Je saisis cette oc-
» casion pour remercier M. *Bouvard*, ainsi que MM. *Arago*, *Mathieu*
» et *Nicollet*, astronomes à l'observatoire royal de Paris, pour les
» renseignemens qu'ils m'ont communiqués, et pour l'intérêt qu'ils
» ont témoigné prendre à la formation d'un Observatoire dans nos
» provinces méridionnales, lorsque, pour cet objet, j'avais été envoyé
» en France par S. M. le roi des Pays-Bas. Malheureusement ce projet
» si noblement conçu par M. *Falck*, à qui les sciences doivent plus
» d'un établissement utile, semble avoir été ajourné, comme si nos
» provinces étaient destinées à être privées pour toujours d'un des
» monumens scientifiques qui contribuerait le plus à leur gloire (**). »

(*) Voyez la note de M. *Hachette*, lue à la Société Philomatique et insérée (*Corresp. math. et phys.*, pag. 364).

(**) Des protections bienveillantes ont fait renaître nos espérances, et bientôt, peut-être, nous serons assez heureux pour pouvoir les signaler à la reconnaissance publique.

A. Q.

Le septième mémoire mathématique porte sur le principe *des vitesses virtuelles* : il est de M. *M. G. Pagani* dont nous aurons occasion de faire connaître d'autres recherches consignées dans les *Annales mathématiques de Nismes*, dans la *Collection des mémoires couronnés par l'Académie royale des sciences et lettres de Bruxelles*, et dans d'autres recueils scientifiques. Nous avons déjà rendu compte de la première partie de ce travail dans le n.° actuel; les deux autres parties seront analysées dans le suivant.

Enfin le huitième et dernier mémoire qui est encore de M. *Quetelet*, a pour titre : *Sur les lois des naissances et de la mortalité :* quelques extraits en ont été donnés dans le premier volume de la *Corresp. Math. et Phys.* pag. 16, 78 et 217 : nous sommes informés que sur la présentation qui a été faite de ce travail à l'institut de France, par M. le baron *Fourier*, l'un des secrétaires perpétuels, l'institut a chargé l'un de ses membres d'en faire un rapport verbal. L'auteur a été aidé dans le dépouillement des registres de l'état-civil de la ville de Bruxelles, par M. *Morren*, alors un de ses élèves, et maintenant étudiant à l'Université de Gand, où il se destine à la carrière de l'enseignement des sciences (*).

Nous renverrons au prochain cahier l'analyse d'un mémoire de notre collègue M. *J. Kickx*, sur la *Géographie physique du Brabant-Méridional.*

J. G. G.

Sur le mémoire de M. Lobatto, *présenté à l'Académie royale des sciences et lettres de Bruxelles, ayant pour titre :* Recherches sur la sommation de quelques séries trigonométriques.

J'ignore, dit l'auteur, jusqu'à quel point les résultats auxquels je suis parvenu, sont entièrement neufs; je n'ai pu m'en assurer, n'étant pas à même de consulter à cet effet les derniers ouvrages ou journaux.

(*) Nous devons aussi à M. *Morren*, les dessins des planches de la *Corresp.*

Je désire seulement n'être pas regardé comme plagiaire, dans le cas ou ces résultats se trouveraient déjà publiés quelque part.

Nous observerons que, dans ces derniers temps, plusieurs Géomètres et, entre autres, MM. *Poisson et Poinsot* se sont livrés à des recherches sur l'*analyse des sections angulaires*, et qu'ils ont montré à quoi tiennent les imperfections reprochées aux formules que donnent cette théorie. Ces Géomètres paraissent avoir été guidés par cette pensée de *Lagrange*, savoir, que « Si l'analyse paraît quelque fois en défaut, » c'est toujours faute de l'envisager d'une manière assez étendue et » de la traiter avec toute la généralité dont elle est susceptible. » M. *Poinsot* s'est surtout attaché à montrer que ces imperfections ne tiennent pas, comme on l'avait cru, à la nature de l'exposant qui peut être supposée quelconque, mais bien à celle de l'arc qui ne doit pas excéder certaines limites (*).

Comme la vérité est une, M. *Lobatto* a du se rencontrer avec les Géomètres en question, mais seulement dans les résultats des mêmes recherches et non dans la manière d'y parvenir. La marche de M. *Lobatto* est simple et uniforme : toutes les conclusions auxquelles il parvient et dont plusieurs nous ont paru lui être propres, sont déduites de deux formules composées de deux termes combinés par addition et soustraction, et qu'il ne s'agit plus que d'évaluer à l'aide de la loi donnée des coefficiens de la série trigonométrique qu'il se propose de sommer. Ces évaluations présentent, dans plusieurs cas, des difficultés que l'auteur a surmontées avec beaucoup de sagacité.

Dans la première partie de son mémoire, l'auteur traite ou somme les séries simples ou de la forme

$$a_1 \sin. 1x + a_2 \sin. 2x + a_3 \sin. 3x + \ldots\ldots$$
$$a_1 \cos. 1x + a_2 \cos. 2x + a_3 \cos. 3x + \ldots\ldots$$

où a_1, a_2, a_3, etc., sont des coefficiens dont la loi doit être donnée.

Dans la suivante, il considère les séries composées ou de la forme

$$a_1 \sin. 1x \sin. 1y + a_2 \sin. 2x \sin. 2y + a_3 \sin. 3x \sin. 3y + \text{etc.}$$
$$a_1 \cos. 1x \cos. 1y + a_2 \cos. 2x \cos. 2y + a_3 \cos. 3x \cos. 3y + \text{etc.}$$

(*) Voyez encore (tome XIII des Annales mathématiques de Niames) un mémoire ayant pour titre : *Eclaircissemens sur le développement de* $\cos.^m x$ *en fonctions des sinus et des cosinus d'arcs multiples, par M. Pagani*, membre de l'Académie royale des sciences et lettres de Bruxelles.

et, comme on doit s'y attendre, il les rappelle aux deux formes déjà traitées.

Il passe ensuite aux séries comprises sous ces formes

$$a_0 \sin. x + a_1 \sin. (x + \alpha) + a_2 \sin. (x + 2\alpha) + \text{etc.}$$
$$a_0 \cos. x + a_1 \cos. (x + \alpha) + a_2 \cos. (x + 2\alpha) + \text{etc.}$$

dans lesquelles la loi des coefficiens doit être donnée et où les arcs suivent une progression arithmétique, séries que M. *Poisson* a aussi considérées dans son mémoire, mais qu'il a traitées par une autre voie.

Enfin M. *Lobatto* termine son travail par montrer en peu de mots comment les séries infinies qu'il vient de considérer, s'appliquent à la division du cercle en parties égales.

Il nous semble que le travail de M. *Lobatto* ne fait pas double emploi dans les recherches sur cette matière, et nous ne pouvons que l'engager à donner de la publicité à son mémoire, qui est un nouveau titre ajouté à ceux qu'il s'est déjà faits dans les sciences.

LES ÉDITEURS.

Séance du 24 décembre 1825. — M. *Walter*, inspecteur-général des études etc., qui avait été nommé précédemment membre honoraire, prend place aux séances. M. *Dewez*, secrétaire perpétuel, donne communication d'une lettre de M. *Wronski* par laquelle il est demandé un rapport sur un *Arithmoscope* ou instrument destiné à suppléer à l'emploi des tables ordinaires de logarithmes, avec un mémoire explicatif : on nomme trois commissaires. M. *Quetelet* donne communication à l'académie d'une lettre de M. *Bouvard* et d'une autre de M. *Ampère*, à laquelle est joint un mémoire sur l'électro-dynamique (voyez pag. 35 et suiv. de ce vol.).

Séance du 4 février 1826. — M. *Dewez* présente deux volumes des mémoires de l'académie de Philadelphie. M. *Quetelet* donne communication d'une lettre de M. le baron *Cuvier*, dans laquelle est annoncé l'envoi des deux derniers vol. de l'académie royale de Paris. Les commissaires nommés à la séance précédente pour l'examen de l'Arithmoscope de M. *Wronski*, font un rapport dans lequel ils concluent que

l'instrument, quoique fort ingénieux, ne peut remplacer avantageusement les tables de logarithmes. M. *Pagani* lit une note sur la construction des *gaz-mètres* dont se servent les anglais pour mesurer les quantités de gaz fournies aux abonnés pour l'éclairage (*). L'académie procède ensuite à la nomination des commissaires pour l'examen des différens mémoires envoyés au concours de 1826.

Annales de l'Université de Louvain.

Le choix des questions dans les concours académiques devient assez embarrassant, quand on veut que les jeunes concurrens trouvent à la fois dans leur solution un sujet d'agrément et d'utilité, qui les prépare de loin à des recherches plus importantes. Il est de ces questions qui exigent des recherches pénibles, fastidieuses, et qui font perdre un temps précieux à une époque ou l'imagination a sur-tout besoin de se développer, et qui ne peuvent produire en dernier résultat qu'une compilation plus ou moins bien coordonnée; quelquefois même l'élève, avec d'heureuses dispositions d'ailleurs, se trouvant forcé de de se traîner sur les pas des grands maîtres, sans espoir d'ajouter aux produits de leur veilles, ou même de s'élever entièrement à la hauteur de leur conceptions, se décourage et finit par devenir un commentateur médiocre, tandis qu'il aurait pu aspirer peut-être lui-même à l'honneur d'être commenté un jour : d'ailleurs il est peut-être bon, sur-tout en mathématiques, quand on veut avoir des idées à soi, de ne pas s'occuper trop de celles des autres : il ne s'agit pas de lire beaucoup de livres, mais d'en lire quelques bons. Il est d'autres questions qui exigent des perfectionnemens de théorie qui ont échappé aux savans les plus distingués, et qu'on ne peut proposer à des élèves qu'avec l'assurance de recevoir des réponses imparfaites et défectueuses. En général, les professeurs des Universités ont bien senti ces écueils et proposent le plus souvent des problêmes utiles dont la solution se

(*) Cette note trouvera place dans le numéro suivant.

trouve dans le développement des mêmes théories qu'ils ont exposées : de manière que l'élève a le plus grand intérêt à suivre assidûment les cours et se trouve dans la nécessité de répéter le texte de ses leçons et de l'envisager sous tous les rapports. La première question couronnée que présentent les annales de Louvain (*), est de M. *Kumps* : sans être justement d'un bien haut intérêt, elle rentre cependant dans la classe des problêmes qui sont de nature à exercer l'intelligence.

La voici : (concours de 1821). *Datus sit radius sphæræ, cui singula corpora solida, quorum hedræ sunt polygona duplicis generis* (triangula *et* quadrata; triangula *et* pentagona, quadrata *et* pentagona; quadrata *et* hexagona.....) *regularia, anguli solidi æquales vel symmetrici, inscripta sunt. Quærantur valores generales qui præbent quantitatem* 1.° *cujusvis ejusmodi corporis acierum;* 2.° *hedrarum;* 3.° *superficierum;* 4.° *soliditatis;* 5.° *radii denique circuli qui circa singulam cujusvis corporis supra inventi hedram circumscribi potest.*

M. *Kumps* a consacré la première partie de son mémoire à l'énumération des corps semi-réguliers dont il est question dans l'énoncé. Nous allons indiquer rapidement la marche qu'il a suivie. Supposons qu'il y ait M polygones de m côtés et N de n côtés dans un de ces corps; et que de plus chacun des E angles polyèdres, renferme p angles plans, appartenant aux premiers polygones et q appartenant aux autres : le nombre total des angles de la première espèce, sera Mm, et comme chaque angle polyèdre en renferme p, on aura pour le nombre des angles polyèdres, $E=\frac{Mm}{p}$; on a de même $E=\frac{Nn}{q}$: d'où l'on déduit

$$M=\frac{Ep}{m} \text{ et } N=\frac{Eq}{n}.$$

Mais la Géométrie élémentaire donne pour valeur d'un angle d'un polygone M, savoir : $\frac{2m-4}{m}$, en prenant l'angle droit pour unité : on a une valeur analogue pour un angle de la seconde série de polygones. Pour avoir la valeur des angles plans $p+q$ qui se grouppent

(*) Le premier volume *des Annales de Louvain*, comprend les Annales 1817, 1818 et 1819; le second comprend 1819 et 1820 : ils n'offrent pas de Mémoires mathématiques ou physiques.

autour d'un même sommet, il faut donc répéter la première valeur un nombre p de fois et la seconde un nombre q de fois : en multipliant cette somme par E, c'est-à-dire, par le nombre des sommets du polyèdre, on aura la valeur de tous angles plans qui composent ce polyèdre : mais cette valeur est encore égale à quatre fois autant d'angles droits qu'il y a d'angles polyèdres moins huit (*) : d'où

$$E\left[p\frac{2m-4}{m}+q\frac{2n-4}{n}\right]=4E-8$$

ou bien encore

$$E=\frac{4mn}{2mn-np\,(m-2)-mq\,(n-2)}$$

En désignant le dénominateur par A, on a

$$E=\frac{4mn}{A},\ M=\frac{4np}{A},\ N=\frac{4mq}{A}.$$

En s'assujétissant maintenant à la condition de ne prendre pour E, M et N que des valeurs entières et positives, la question peut comporter douze solutions différentes que l'auteur a discutées avec ordre et clarté : cette partie de son travail est sans contredit la plus intéressante; elle répond pleinement à tout ce que demandait le programme : il en est de même de la seconde; M. Kumps y établit les rapports numériques qui existent entre les arètes, les valeurs des angles plans, des surfaces, etc.; mais malheureusement ses formules qui ne dépendent d'aucune loi générale, s'obtiennent péniblement et n'offrent aucune symétrie : ce défaut d'ailleurs est inhérent à la question et ne nuit point au mérite des recherches de M. *Kumps*. On doit encore savoir gré à l'auteur d'avoir dessiné les développemens des onze corps qu'il a examinés successivement dans son énumération; ces desseins forment, pour ainsi dire, la partie complémentaire de son travail.

M. *Wenzel*, dans sa dissertation couronnée, a traité, à-peu-près, le même sujet que M. *Kumps*. Dans la première partie, il expose quelques propriétés de l'*Exoctaèdre*, ou corps semi-régulier que l'on obtient en abattant les huit angles solides d'un cube, de manière à mettre à nu huit triangles équilatéraux, les six carrés primitifs étant réduits

---

(*) Nov. Comment. Acad. Petrop. tom. IV, pag. 154, art. 1752-1753.

à six autres d'une surface deux fois moindre. Dans un pareil polyèdre, le nombre des arêtes est de 24, puisque les huit triangles et les six carrés présentent 48 côtés par lesquels ils adhèrent deux à deux, et le nombre des angles solides est égal à 12, puisque chacun est formé de quatre angles plans ; il donne ensuite le moyen d'inscrire et de circonscrire à l'Exoctaèdre tous les corps réguliers et assigne les rapports qui existent entre les arêtes de tous ces corps. Dans la seconde partie de sa dissertation, M. *Wenzel*, refait le même travail pour l'*Icosidodécaèdre*, ou corps semi-régulier qu'on obtient en abattant les vingt angles solides du dodécaèdre régulier, de manière à mettre à nu vingt triangles équilatéraux, les douze pentagones primitifs se trouvant réduits à douze autres ; ce qui fait en tout 32 faces, et l'on a 60 arètes et 30 angles solides.

M. *Wenzel* a exposé son travail avec méthode et clarté et a répondu d'une manière bien satisfaisante à la question qui lui était proposée : on pourrait peut-être désirer un peu plus d'élégance dans plusieurs de ses démonstrations.

L'Université de Louvain avait proposé pour 1824 la question suivante :

Dantur axes XX' *et* YY' *in puncto* A *sub angulis rectis se transeuntes : in axe* YY' *capitur portio* AB = a, *et ex puncto* B *ad ipsam axem* YY' *perpendicularis recta* BC = b *elevatur ; literis* a *et* b *quantitates determinatas significantibus ; ex puncto* C *rectae lineae in axem* YY' *emittuntur, ad quas ex punctis intersectionum cum axe* YY' *perpendiculares excitantur ; de puncto* A *deinceps ad has perpendiculares perpendicula alia dejiciuntur, quorum pedes in linea curva jacent, cujus natura auxilio aequationis inter coordinatas orthogonas* x *et* y *exhibitae primum investigetur, quin tamen auctor rectificationem curvae atque quadraturam indagare debeat ; usus deinde ejusdem curvae accurate laudetur.*

M. *P. J. Schmitz* a répondu à cette question par un mémoire assez étendu qui a été jugé digne de la médaille d'or. Dans la première partie de son travail, il a rapporté la courbe dont il s'agit à des coordonnées rectangulaires et a trouvé pour équation :

$$x^3 = y^2(b - x) + axy$$

Cette équation représente une ligne que *Newton* a rangée dans son

énumération, parmi les *hyperboles défectueuses qui n'ont qu'un diamètre;* elle n'offre qu'une branche qui se replie en formant un nœud et embrasse une asymptote de deux côtés opposés, à-peu-près comme la focale dont elle diffère cependant.

L'auteur, comme il l'avoue modestement dans son introduction, dépourvu des secours du calcul infinitésimal, a dû faire les plus grands efforts pour saisir quelques particularités de sa courbe. C'est ainsi qu'au milieu de 32 pages in-4.°, chargées de proportions et d'équations, il n'est parvenu qu'à trouver la construction des tangentes perpendiculaires ou parallèles aux axes, la détermination d'une droite asymptote et celle des ordonnées *maxima* et *minima;* il avoue n'avoir pu déterminer un point d'inflexion dont il a reconnu l'existence. M. *Schmitz* en faisant successivement nulles les deux constantes *b* et *a*, observe que, dans le premier cas, on a l'équation d'un cercle, et, dans le second, celle d'une courbe du troisième degré, avec un point de rebroussement auquel se réduit le nœud : avec un peu d'attention, il aurait pu reconnaître que cette courbe était la *Cissoïde des anciens.*

Dans la seconde partie de la dissertation qui était destinée à faire valoir les avantages de la courbe, l'auteur résout successivement le problême de la duplication du cube et celui de la trisection de l'angle, et donne la construction de différentes équations du 3.e degré. Tout en louant l'auteur de la manière dont il a éludé plusieurs difficultés, nous sommes forcés de convenir que les avantages de la courbe ne sont pas aussi si grands qu'il semble le croire, puisque la résolution de ces problêmes, qui dépend d'équations du 3.e degré, est commune à une foule de courbes du même ordre. Les problêmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle n'ont acquis cette grande célébrité chez les anciens, que par l'impossibilité où l'on était de les résoudre par le moyen de la droite et du cercle, en faisant usage de la règle et du compas, comme on s'obstinait à vouloir le faire; mais dès qu'on a pu employer des moyens différens, on a eu à la fois plusieurs solutions dont les premières ont été obtenues par la *cissoïde de Dioclès* et *par la conchoïde de Nicomède.* Depuis qu'on a reconnu que toute équation entre deux inconnues, était la représentation Mathématique d'une ligne, on n'a attaché de nom aux courbes qu'autant que leurs points jouissaient de propriétés particulières. L'examen des propriétés d'une courbe quelconque que l'on se donne, peut être utile,

comme exercice, mais ne peut guère le devenir à la science, à moins qu'on n'en déduise des aperçus nouveaux. Nous croyons aussi devoir observer que, dans un très-grand nombre de cas, l'emploi des équations polaires est préférable à celle de coordonnées rectangulaires, surtout quand il s'agit de la construction des tangentes et des quadratures. Ces recherches acquièrent même quelquefois une certaine élégance, comme nous en avons donné des exemples (I.er vol. pag. 265) et comme nous pouvons le faire encore ici, en rattachant l'examen de la courbe précédemment mentionnée à une classe d'autres courbes assez curieuses.

Soit un cercle AaO (*fig.* 21) et une droite CBm'; d'une point A pris sur la circonférence, menons autant de droites Am' que l'on voudra; puis portons les parties pm' interceptées entre cette circonférence et la droite, sur le prolongement de p en m : la suite des points tels que m, se trouvera sur une courbe dont l'équation polaire sera, en prenant $Am=\rho$ pour rayon vecteur, et fesant $MAm=\varphi$ et $MAO=OCB=\alpha$:

$$\rho=2Ap+Am'=2AO\cos.(\varphi+\alpha)+\frac{AB}{\sin.\varphi}.$$

Les propriétés communes aux lignes exprimées par cette équation, sont les suivantes :

1.° D'être du troisième degré.

2.° D'avoir une asymptote qui est enveloppée par les deux branches de la courbe, quand la perpendiculaire AB abaissée du pôle sur la droite donnée, ne passe pas par le centre : dans le cas contraire, l'asymptote laisse les deux branches d'un même côté, et la courbe prend un diamètre.

3.° L'asymptote $C'B'$ sera toujours une droite parallèle à la droite donnée; et le pôle A se trouve également distant de ces deux droites parallèles.

4.° En menant une tangente au cercle au point A, elle coupera l'asymptote au point G par lequel passe aussi la courbe.

5.° Pour avoir les ordonnées *maxima* et *minima*, que l'on suppose dans le cercle un diamètre perpendiculaire à l'asymptote, et que l'on mène du pôle deux sécantes qui passent par les extrémités de ce diamètre; prolongées, elles iront aboutir au point le plus élevé et au point le plus bas de la courbe, de sorte que les points *maxima* et



minima de la courbe et du cercle, sont sur deux droites qui se coupent perpendiculairement au pôle A.

On pourrait ranger ces courbes en trois classes selon que la droite CB coupe le cercle, lui est tangente ou extérieure : nous distinguerons seulement les suivantes :

Quand $AB = Aa = AO. \sin. \alpha$, on a l'équation de la *focale* sur le cône, et pour $\alpha = 90°$, on a la *focale régulière* considérée sur le cylindre.

En fesant $AB = 2Aa = 2AO. \sin. \alpha$, on a l'équation de la courbe traitée par M. *Schmitz;* et si $\alpha = 90$, on a la *Cissoïde* des anciens. L'inspection seule de la figure met en évidence ce que nous avançons.

Si l'on suppose encore la droite donnée tangente au cercle et le pôle *au centre*, au lieu de le prendre à la circonférence, on produira la partie inférieure d'une *conchoïde*.

Quant à la construction des tangentes, on peut la réduire à la recherche des sousnormales, comme nous l'avons indiqué (I.er vol. pag. 265) on a alors

$$\rho' = 2\,\overline{AO} \sin. (\varphi + \alpha) + \frac{\overline{AB} \cos. \varphi}{\sin.^2 \varphi}.$$

en regardant cette équation comme celle d'une courbe nouvelle, la sousnormale ρ' se construira facilement en observant que ....

$$2AO \sin. (\varphi + \alpha) = Cn \text{ et } \frac{\overline{AB} \cos. \varphi}{\sin. \varphi} = Bm', \text{ d'où}$$

$$\rho' = Cn + \frac{Bm'}{\sin. \varphi}$$

de plus dans le triangle rectangle $A'm'B$ (A' étant le point de concours des droites $m'A'$ et BA'), on a $\frac{Bm'}{\sin. \varphi} = A'm'$: on en déduit définitivement, cette valeur très-simple de la sousnormale

$$\rho' = A'm' + Cn.$$

M. *Dandelin*, dans le mémoire qu'il a composé sur les propriétés de la *focale* (*), avait fait entrer d'abord la résolution des problêmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle, ainsi que la

(*) Mémoires de l'Académie de Bruxelles, II.e vol.

construction des équations du troisième degré; mais il les a fait disparaître ensuite par les motifs dont nous avons parlé plus haut.

Comme ses solutions sont cependant fort élégantes, nous pourrons les faire connaître par la suite.

Il ne sera peut-être pas hors de propos de remarquer ici que MM. *Kumps*, *Wenzel* et *Schmitz*, dont nous venons d'analyser les dissertations couronnées, ont reçu une récompense bien honorable de leurs traveaux, en se trouvant placés dans l'instruction au sortir de l'Université : M. *Kumps*, à l'Athénée d'Anvers; M. *Wenzel*, au collége de Louvain, et M. *Schmitz*, au collége de S.t-Trond. De pareilles nominations prouvent que notre gouvernement sait apprécier et récompenser les talens.

*** M. *Glosener* vient de prononcer son discours inaugural, en qualité de professeur extraordinaire dans la faculté des sciences. M. *Pagani* vient d'être nommé professeur extraordinaire dans la même faculté.

A. Q.

*** A une époque où les écoles d'arts et métiers se propagent avec la rapidité des idées nouvelles, c'est une de nos obligations d'annoncer les ouvrages propres à servir de texte à ce nouvel enseignement déjà généralisé en France et en Angleterre, et dont ce pays doit bientôt ressentir le bienfait, enseignement sur lequel il n'avait existé jusqu'ici aucun traité spécial, du moins que nous sachions. Nous citerons donc le seul qui soit venu à notre connaissance, celui de M. le baron *Ch. Dupin*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, membre de l'Académie royale des sciences de Paris, etc., et professeur au Conservatoire des arts et métiers de cette ville. Cet ouvrage que nous nous bornerons ici à annoncer, a pour titre : *Géométrie et Mécanique des arts et métiers et des beaux-arts :* il se composera de trois volumes in-8.°, au prix de *dix-huit francs :* le premier a paru, il contient seize cahiers, et déjà trois cahiers du second volume sont publiés.

J. G. G.

Questions proposées par l'Université de Leyden.

E Physica.

Quæritur Theoria Physico-Mathematica cum *Antliæ Suctoriæ*, tum *Antliæ compressoriæ* generalis ; atque utriusque effectus ad aquas elevandas invicem comparentur.

E Mathesi.

Datâ quatuor sphærarum inter se invicem dispositarum magnitudine et mutuâ positione, inveniantur, cum loca centrorum, tum radii omnium Sphærarum quæ datas illas tangunt (*).

Ex Astronomia.

Planetarum Jovis, Martis et Veneris determinentur distantiæ proximæ, minimæ et geocentricæ, anno superiori observatæ.

Questions à résoudre.

1.° Soit F (*fig.* 22) l'un des foyers d'une ellipse dont FA, FA', FA'' sont trois rayons vecteurs : de F comme centre, avec un rayon quelconque, on décrit un cercle qui coupe ces trois rayons vecteurs en a, a' et a'' qu'on joint par les droites aa', $a'a''$, $a''a$: si l'on divise ces cordes en raison inverse des rayons vecteurs contigus aux segmens, c'est-à-dire, telle manière qu'on ait $\frac{aB}{a'B} = \frac{A'F}{AF}$; $\frac{a'B'}{a''B'} = \frac{A''F}{A'F}$, $\frac{aB''}{a''B''} = \frac{A''F}{AF}$, et qu'aux points de division B, B' et B'', on élève des perpendiculaires aux cordes aa', $a'a''$, $a''a$; ces perpendiculaires concourront en un point P. Si l'ellipse est considérée comme l'orbite

(*) On trouve dans la Correspondance de l'Ecole Polytechnique, une note très-étendue des recherches faites, en général, sur la théorie des contacts tant des cercles que des sphères ; sur ce sujet on peut encore consulter les journaux de la même école, et les pag. 13 et 14 de ce cahier.

J. G G.

d'une planète, 1.° la droite FP est dirigée suivant la ligne des apsides; 2.° le point P est du même côté que l'aphélie, par rapport au foyer F de la trajectoire : 3.° FP est égal à l'excentricité de l'orbite, en prenant le rayon Fa pour la distance moyenne. Ici il ne s'agit que de démontrer l'existence du point de concours P des trois perpendiculaires aux trois cordes, menées suivant les conditions énoncées.

2.° Soit l'équation

$$x = \cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \text{etc.}}}}$$

On demande d'exprimer la valeur d'une quelconque des quantités qui composent la fraction continue, en fonction de toutes les autres quantités.

3.° Si l'on coupe un cône droit par un plan dans une position quelconque, on demande le rapport qui existe entre la surface de la section conique et la surface du cône comprise entre cette même section et le sommet du cône.

4.° Assigner l'équation de la courbe dont chaque portion de surface vaut un rectangle qui aurait pour base l'arc correspondant et pour hauteur une troisième proportionnelle à une constante et à l'ordonnée.

MATHEMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Solutions par M. ADOLPHE LESCHEVAIN, *élève de l'Athénée royal de Tournay, des problêmes* 1.° *et* 2.° *de Mathématiques élémentaires, proposés pag.* 357 *de la* Corresp. (*).

1.° *Inscrire dans un cercle un rectangle dont l'un des côtés passe par un point* P *donné, et soit égal à une droite donnée* a

Par P (*fig.* 23) je mène le diamètre Dd et le côté $mn = a$: si l'on pose DP $=$ D, P$d =$ H, P$n = x$, on aura P$m = a - x$, et la proportion

$$(a - x)\, x = \mathrm{DP} \times \mathrm{P}d = \mathrm{D} \times \mathrm{H}$$

d'où

$$x^2 - ax = -\mathrm{D} \times \mathrm{H} = -a'^2$$

a' étant la moyenne proportionnelle Pa entre DP et Pd. De là

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a'^2}.$$

On construira le radical, en décrivant de a, comme centre, avec le rayon $\frac{a}{2}$, un arc de cercle qui coupera le diamètre en b; on aura donc

$$x = \frac{a}{2} \pm \mathrm{P}b.$$

De b comme centre, avec un rayon égal à $\frac{a}{2}$, je décris un autre arc qui coupe le diamètre en c, et Pc sera l'un des segmens cherchés. Du point donné P, avec le rayon Pc, je décris deux arcs de cercle qui coupent la circonférence en n et n' : par chacun de ces points

(*) Quoique M. *Leschevain* ait résolu, en troisième lieu, une question non proposée, cependant nous exposerons ici sa solution qui nous fournira l'occasion d'une addition qui peut offrir quelqu'intérêt.

et le point P, je mène une corde qui sera le côté du rectangle qu'on achevera facilement.

Comme la corde aa perpendiculaire à Dd, est la plus petite qu'on puisse mener par P, le problème devient impossible, dès que $\frac{a}{2} < a$P ou $< a'$.

M. *Leschevain* a aussi résolu le problème 2.° qui se réduit à mener par un point P donné dans un cercle, une corde égale à une ligne donnée. Il s'est encore exercé sur le suivant : *inscrire à un cercle donné un triangle dont deux côtés soient parallèles à deux droites données et dont le troisième passe par un point donné.* Cette solution revient à ces termes.

Soient (*fig.* 24) ba et bc les droites données auxquelles deux des côtés du triangle doivent être parallèles, BAC le cercle et P le point donnés : au cercle on inscrira une corde mn telle que le segment mAKCn soit capable de l'angle abc; puis ayant décrit un cercle concentrique au cercle donné et qui touche la corde mn, on mènera par le point P donné une tangente à ce cercle, et sa partie AC interceptée dans la circonférence donnée, sera l'un des côtés du triangle : par A menant une parallèle AB à ab, et joignant B et C, le triangle ABC sera le triangle cherché. On observera que par le point P, on peut mener une seconde tangente au cercle concentrique. On pourra suivre les différentes modifications de cette solution, correspondantes aux différentes positions du point P par rapport au cercle donné.

ADDITION.

A un cercle donné, inscrire un triangle dont les côtés passent par trois points donnés de position.

La solution de ce problème dépend de celle du suivant :

A un cercle donné inscrire un triangle dont deux des côtés passent par deux points donnés de position, et dont le trosième soit parallèle à une droite donnée de position.

Et la solution de ce dernier dépend elle-même de celle du suivant.

Inscrire à un cercle donné un triangle dont deux côtés soient parallèles à deux droites données de position et qui se coupent, et dont le troisième côté passe par un point donné.

Lagrange, Euler, Fuss, Lexell, Castillon et d'autres Géomètres distingués n'ont pas dédaigné de s'occuper du problème général proposé par *Cramer*, connu par son *Introduction à l'analyse des lignes*

courbes. Mais de toutes les solutions connues et dans lesquelles on emploie le calcul, la plus simple est celle de l'illustre *Lagrange*, que nous allons exposer : elle se rapporte au troisième et au premier problême.

Soit (*fig.* 25) ABC le triangle cherché dont les côtés BA et BC sont parallèles à deux droites données de position, et dont le côté AC passe par un point donné P. Du centre O du cercle circonscrit, soient abaissées les perpendiculaires OP′ et OP″ sur BC et BA ; puisque l'angle P′OP″ est le supplément de l'angle entre les droites, et que d'ailleurs le point P est donné, les angles POP′ et POP″ sont connus. Posons donc

$$POP' = \varphi,\ P'OP'' = \varphi',\ POP'' = \varphi'',\ P'OB = P'OC = x$$

on aura

$$POC = \varphi - x,\ P''OB = P''OA = \varphi' - x,\ AOP = \varphi'' - \varphi' + x$$
$$AOC = POA + POC = \varphi'' + \varphi - x - \varphi' + x = \varphi'' + \varphi - \varphi',$$
$$AOP - COP = 2x - (\varphi + \varphi' - \varphi'')$$

L'angle x fait connaître par rapport à la ligne OP′ donnée de position, la direction du rayon OC qui détermine le point C, et conséquemment les deux autres sommets A et B. Soient OP $= a$, et le rayon AO $= r$. On a la proportion

$$r : a = \cos.\left(x - \frac{\varphi + \varphi' - \varphi''}{2}\right) : \cos.\left(\frac{\varphi'' + \varphi - \varphi'}{2}\right) \text{(*)}$$

(*) Soit le triangle AOC (*fig.* 26) dans lequel OA = OC, et menons une droite OP à un point quelconque P de la base et la perpendiculaire OH à cette base ; on aura

$$AO : OP = \sin.\ OPA : \sin.\ A$$

or, l'angle AOH $= \dfrac{AOP + POC}{2}$ et POH $= \dfrac{AOP - POC}{2}$; donc ....

sin. OPA = cos. POH = $\cos.\left(\dfrac{AOP - POC}{2}\right)$ et sin A = cos AOH = cos ½AOC : la proportion devient donc

$$AO : OP = \cos.\left(\frac{AOP - POC}{2}\right) : \cos.\ \tfrac{1}{2}\, AOC \ldots\ldots \text{(A)}$$

qui est celle du texte. Lorsque le point P tombe sur le prolongement de AC, on trouve

$$AO : OP = \cos.\left(\frac{AOP + POC}{2}\right) : \cos.\ \tfrac{1}{2}\, AOC.$$

or, en désignant l'angle droit par D, on a $\frac{\varphi+\varphi'+\varphi''}{2}=2D$; donc $\frac{\varphi-\varphi''+\varphi'}{2}=2D-\varphi''$, $\frac{\varphi''-\varphi'+\varphi}{2}=2D-\varphi'$: d'où résulte

$$r:a=\cos.[x-(2D-\varphi'')]:\cos.(2D-\varphi')=\cos.(x+\varphi''):\cos.\varphi'$$

proportion qui fait connaître l'angle $x+\varphi''$, et conséquemment l'angle x, puisque l'angle φ'' est donné.

Lagrange a aussi résolu la première question, comme il suit : soient (*fig.* 27) P, P', P'' les points par lesquels doivent passer les côtés AC, CB et BA. En conservant les dénominations ci-dessus, faisons

$$POC=y,\ P'OB=y',\ P''OA=y''$$

d'où

$$COP'=\varphi-y,\ BOP''=\varphi'-y',\ AOP=\varphi''-y''$$

Soient de plus $OP=a$, $OP'=a'$, $OP''=a''$: on aura les trois équations (*)

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}y\times\text{tang.}\left(\frac{\varphi''-y''}{2}\right)=\frac{r-a}{r+a}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}y'\times\text{tang.}\left(\frac{\varphi-y}{2}\right)=\frac{r-a'}{r+a'}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}y''\times\text{tang.}\left(\frac{\varphi'-y'}{2}\right)=\frac{r-a''}{r+a''}$$

desquelles il s'agit de conclure chacune des inconnues y, y' et y''.

(*) En observant que l'angle AOC = AOP + COP, la proportion (A) [note précédente] donnera

$$AO+OP:AO-OP=\cos.\tfrac{1}{2}(AOP-POC)+\cos.\tfrac{1}{2}(AOP+POC):\cos.\tfrac{1}{2}(AOP-POC)-\cos.\tfrac{1}{2}(AOP+POC)$$

or, en vertu des formules

$$\cos.p+\cos.q=2\cos.\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos.\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos.p-\cos.q=2\sin.\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin.\left(\frac{q-p}{2}\right)$$

la proportion précédente se change dans celle-ci

$$AO+OP:AO-OP=\cos.\tfrac{1}{2}AOP\times\cos.\tfrac{1}{2}POC:\sin.\tfrac{1}{2}AOP\times\sin\tfrac{1}{2}POC$$
$$=1:\text{tang.}\tfrac{1}{2}AOP\times\text{tang.}\tfrac{1}{2}POC$$

A cet effet, et, en faisant usage de la formule connue

$$\text{tang.}(m-n)=\frac{\text{tang.}\,m-\text{tang.}\,n}{1+\text{tang.}\,m\,\text{tang.}\,n},$$

on déduira de la première formule tang. y en tang. y'' : on remplacera tang. y'' par sa valeur en tang. y', tirée de la troisième, et enfin on écrira pour tang. y' sa valeur en tang. y, tirée de la seconde : on aura donc ainsi une équation en tang. y et en quantités connues. En opérant de la même manière, on se procurera deux autres équations l'une en tang. y', l'autre en tang. y''.

M. *S. L'Huilier*, de Genève, a étendu ces questions aux quadrilatères et en général, aux polygones d'un nombre quelconque de côtés inscrits au cercle. Voyez ses *Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique.*

J. G. G.

Extrait d'une lettre de M. MEYER, *docteur de l'Université de Liège, à M.* A. QUETELET.

Je prends la liberté de vous envoyer ici quelques résultats qui, comme vous verrez, m'ont été suggérés par la démonstration du carré de l'hypothénuse, donnée dans les *Mélanges mathématiques*, pag. 29, publiés par M. *Noël*. M. *Hachette* à qui j'avais l'occasion de faire voir ces résultats, m'ayant engagé à les faire insérer dans la *Corresp. mathématique*, j'ai cru pouvoir vous prier de me ménager une place dans votre journal.

En prolongeant (*fig.* 28) les côtés extérieurs CF et AD, des carrés IGFC et HADG, construits sur les côtés IG et HG du triangle rectangle HGI, jusqu'à leur point de rencontre B, et tirant la droite BGQ, ainsi que IN et HM prolongemens des côtés IP et HR du carré HRPI de l'hypothénuse, on aura une équivalence entre le carré IGFC et le parallélogramme IGBN, ainsi qu'entre le même parallélogramme et le rectangle IUQP, à cause de l'égalité des trapèzes UINB et QPIG; il suit

delà que le carré IGFC et le rectangle IPQU sont équivalents. On prouve de la même manière que le carré HGDA est équivalent au rectangle HUQR. C'est la démonstration donnée dans les *Mélanges mathématiques* de M. *Noël*. Cela m'a conduit d'abord au théorème suivant :

Le carré ABCE construit sur la somme AB des deux lignes AD et DB, est égal au carré construit sur la diagonale HI de l'un quelconque des deux rectangles HGIE ou GFBD, plus le rectangle ayant pour base la diagonale HD de l'un des deux carrés HGDA ou IGFC, et pour hauteur la diagonale de l'autre carré.

Car, les deux carrés dont se compose le carré total ABCE, sont égaux au carré HIPR construit sur la diagonale HI du rectangle HGIE; et les deux rectangles dont se compose le même carré total, savoir : les rectangles GFBD et HEIG, sont égaux au rectangle HSTD ayant pour base la diagonale HD du carré HADG, et pour hauteur ZL = GC. En effet, le trapèze CZDN = au trapèze GLTD; par conséquent le rectangle ZLTD = au parallélogramme CGDN : or, celui-ci est équivalent au rectangle GFBD; donc GFBD = ZLTD. On prouve de la même manière que l'autre rectangle, savoir : EHGI = au rectangle HSLZ, donc etc.

En généralisant, j'ai vu que ce théorème n'était qu'un cas particulier de celui-ci. En partageant (*fig.* 29) le parallélogramme quelconque ABCD, par les droites KM et OL menées comme on voudra, en quatre parallélogrammes KUOC, LUMA, UOBM, DLUK, ces quatre parallélog. seront égaux aux parallélog. LEFM et OMGH, qui ont pour côtés chacun deux diagonales appartenant à des parallélogr. opposés; ainsi le parallélogramme LEFM a pour côtés LM et LE = ST = UC, diagonales des parallélogrammes opposés LAMU et KUOC; de même le parallélogramme OMGH, a pour côtés MO et OH = XI = UD, diagonales relatives aux parallélogrammes opposés OUMB, LUKD. Car à cause des trapèzes égaux ULET et CQLS, on a le parallélog. CQLU = au parallélogramme LETS; mais les parallélogrammes CQLU, KDLU sont équivalens; donc les parallélogrammes KDLU et LETS sont équivalens. On démontre de la même manière que le parallélogramme OUMB est équivalent au parallélogramme STFM. On prouvera ensuite de la même manière que le parallélogramme HOMG est équivalent aux deux parallélogrammes CKUO et ULAM.

Ce théorème m'a conduit à cet autre :

Si l'on construit sur les deux côtés LU et UM du triangle quelconque ULM, deux parallélogrammes quelconques OUMB et KULD; si l'on prolonge les côtés extérieurs DK et OB de ces deux parallélogrammes jusqu'en leur point de rencontre G; si l'on joint G et U et qu'après avoir prolongé indéfiniment la droite CU, l'on prenne à partir du point d'intersection S de cette droite et du troisième côté du triangle, une partie ST = UC, et qu'on achève le parallélogramme LEFM, dans lequel EF passant par T, est parallèle à LM; LE ainsi que MF parallèles à ST, alors le parallélogramme LMFE sera équivalent aux deux parallélogrammes construits sur les deux autres côtés du triangle donné.

La démonstration en est donnée dans ce qui précède. Mais l'on voit que le carré de l'hypothénuse n'est qu'un cas particulier de ce dernier théorème. Car si le triangle donné est rectangle, et si les deux parallélogrammes construits sur les deux côtés de ces triangles, sont des carrés, alors la figure 28, montre que IP = IH = GB (*).

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

De quelques maxima et minima du second degré; par M. J. N. Noel, *professeur des Sciences Phys. et Math., principal de l'Athénée de Luxembourg.* (I.er Art.)

On peut voir dans mon Algèbre et surtout dans mes Mélanges de Mathématiques, la théorie des *maxima* et des *minima* du second

(*) Dans un recueil de théorèmes et de problèmes, qui se trouve à la suite de mon *Traité des réciproques de la Géométrie,* publié à Paris en 1820, j'ai donné (pag. 88), une démonstration assez curieuse et simple *du carré de l'hypoténuse;* et dans mes *Elémens de Géométrie,* imprimés à Gand, en 1818, on trouve un théorème analogue à celui de *Pythagore,* pour trois parallélogrammes construits sur les trois côtés d'un triangle quelconque.

J. G. G.

degré; mon but ici est seulement de donner quelques applications assez remarquables de cette théorie.

Trouver un point O *tel que la somme de ses distances à deux points donnés* A *et* B, *étant une longueur donnée* m, *ce point soit le plus loin possible de la droite* BD *menée par l'un* B *des deux points proposés* (*fig.* 30).

Des points O et A menons sur BD les perpendiculaires OI et AD$=a$. Menons aussi AC parallèle à BD, et prenons BD$=b$, OC$=u$, AO$=x$ et AC$=y$; nous aurons OI$=a+u$, BI$=b-y$ et OB$=m-x$. D'après cela, les deux triangles rectangles ACO et OIB donnent

$$x^2=y^2+u^2,$$
$$m^2-2mx+x^2=b^2-2by+y^2+a^2+2au+u^2.$$

La seconde de ces équations se réduit au moyen de la première, et devient, en transposant, $2mx=m^2-a^2-b^2-2au+2by$; d'où, en posant $h^2=m^2-a^2-b^2$, on déduit

$$x=\frac{h^2-au+2by}{2m}.$$

Substituant cette valeur dans la première équation proposée, et résolvant par rapport à y, on aura successivement

$$(h^2-2au)^2+4b(h^2-2au)y+4b^2y^2=4m^2y^2+4m^2u^2;$$
$$y^2-\frac{b(h^2-2au)}{m^2-b^2}y=\frac{(h^2-2au)^2-4m^2u^2}{4(m^2-b^2)};$$
$$y=\frac{b(h^2-2au)\pm m\sqrt{(h^2-2au)^2-4(m^2-b^2)u^2}}{2(m^2-b^2)}.$$

La variable u n'entre que dans la partie négative sous le radical; il s'ensuit donc que le maximum de u, et par conséquent celui de $a+u$ ou de OI, rend nulle la quantité soumise au radical de y; ce qui donne, en posant $m^2-b^2=p^2$,

$$(h^2-2au)^2-4p^2u^2=0 \text{ et } y=\frac{b}{2p^2}(h^2-2au).$$

La première de ces équations fournit, en observant que $h^2=m^2-a^2-b^2=p^2-a^2$,

$$u=\tfrac{1}{2}(p-a);\text{ d'où } y=\frac{bu}{p}=\frac{b}{2p}(p-a).$$

Avec ces valeurs, il est aisé de s'assurer que, pour le maximum de OI, on a la proportion

$$y : b-y :: u : a+u, \text{ ou } AC : IB :: OC : OI;$$

qu'ainsi les deux triangles ACO et OIB sont semblables, et que par suite l'angle AOI = IOB.

Si le point O est un anneau dans lequel passe une corde inextensible attachée aux points fixes A et B, et sur laquelle il peut glisser librement; si d'ailleurs cet anneau est tiré par une force P, au moyen du cordon OP, perpendiculaire à la droite donnée BD; il est clair qu'il y aura équilibre, lorsque le point O sera le plus loin possible de BD, et par conséquent, lorsque les deux angles AOI et IOB seront égaux. Telle est précisément la condition donnée dans tous les Traités de Statique, pour l'équilibre d'un anneau tiré par une force et retenu par une corde sur laquelle il peut glisser librement.

La condition précédente pourrait d'ailleurs servir à résoudre plusieurs questions géométriques sur les *maxima* et les *minima*, comme on le voit, pages 240, 241 et 242 des *Mélanges de Mathématiques*.

Connaissant la somme des carrés de n *nombres inconnus, trouver les valeurs de ces nombres, pour que la somme de leurs produits par des nombres donnés, soit un maximum.*

Soient $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ les n nombres cherchés; $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$, les nombres donnés; on aura évidemment les deux équations

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2 = a,$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \ldots + a_n x_n = b.$$

Il s'agit donc, a étant donné, de trouver le maximum de b dans ces équations. Pour cela, ne laissons en évidence que deux des n inconnues proposées, par exemple, x_1 et x_2; et soient p et q tous les termes qui suivent les deux premiers dans les premiers membres des deux équations précédentes : on aura

$$x_1^2 + x_2^2 = a - p \text{ et } a_1 x_1 + a_2 x_2 = b - q \ldots (1)$$

Eliminant x_1 entre ces deux équations et posant $a_1^2 + a_2^2 = k$, l'équation finale deviendra

$$x_2^2 - \frac{2}{k}(b-q)\,a_2 x_2 = \frac{(a-p)\,a_2^2 - (b-q)^2}{k};$$

d'où

$$x_2 = \frac{(b-q)a_2 \pm \sqrt{(a-p)ka_2^2 - (b-q)^2 a_1^2}}{k}.$$

Supposons que les inconnues $x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n$ aient déjà les valeurs qui conviennent au maximum de b; on voit que ce maximum rend nulle la quantité sous le radical de x_2, et donne par conséquent

$$x_2 = \frac{(b-q)a_2}{k} = \frac{(b-q)a_2}{a_1^2 + a_2^2},$$

substituant cette valeur dans la seconde des équations (1), et réduisant, on trouvera

$$x_1 = \frac{(b-q)a_1}{a_1^2 + a_2^2}; \text{ d'où } x_2 = \frac{a_2}{a_1} x_1.$$

D'après cela on voit que, pour le maximum de b, on a

$$x_2 = \frac{a_2}{a_1} x_1, \; x_3 = \frac{a_3}{a_1} x_1, \; x_4 = \frac{a_4}{a_1} x_1, \ldots, \; x_n = \frac{a_n}{a_1} x_1.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation proposée, et désignant par m le quotient de a par la somme des carrés des nombres donnés $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$, on obtiendra

$$x_1 = a_1\sqrt{m}, x_2 = a_2\sqrt{m}, x_3 = a_3\sqrt{m}, x_4 = a_4\sqrt{m}, \ldots, x_n = a_n\sqrt{m}.$$

Il suit de là qu'*étant donnée la somme des carrés de* n *nombres inconnus, pour que la somme de leurs produits respectifs par des nombres donnés, soit un maximum, il faut et il suffit que les nombres inconnus soient proportionnels à leurs multiplicateurs donnés.* (Voyez une application à la page 207 des *Mélanges de Mathématiques*.)

Réciproquement, on voit, par les calculs précédens, que *connaissant la somme des produits respectifs de* n *nombres inconnus par des nombres donnés, le minimum de la somme des carrés de ces nombres inconnus, a lieu lorsque ces nombres inconnus sont proportionnels à leurs multiplicateurs donnés.* De sorte que si ces multiplicateurs étaient égaux, les nombres inconnus seraient égaux pareillement.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Réponse à la question de Géométrie analytique, proposée [1.er volume de la Corresp. (1)], *par M.* A. Timmermans, *professeur de Mathématiques spéciales, au Collége royal de Gand.*

» *Le cercle passant par les trois points de concours de trois* » *tangentes à une parabole, prises deux à deux, passe toujours par* » *le foyer.* »

La solution de cette question se déduit directement de cette propriété connue de la parabole : si par un point d'une tangente à une parabole, on mène une seconde tangente et une droite au foyer, l'angle formé par ces droites est constant : car il suit de là que l'angle FAT, (*fig.* 31) est égal à l'angle FBT″, et que l'angle FCT′ est égal à l'angle FBT; d'où il est facile de conclure que les quatre points

(1) Nous étions M. *Timmermans* et moi dans la ferme persuasion que la question avait été proposée dans le 1.er vol. de la *Correspondance*, où nous en avons inutilement recherché l'énoncé; mais nous nous rappelons à l'instant qu'il n'en a été question que dans une conversation particulière entre nous. J. G. G.

A, B, C et F sont situés sur une même circonférence; si la tangente CA se confondait avec BT, le cercle passant par les points B et C, deviendrait tangent à la droite BT″ en B, et comme le point A devient alors le point T, ce même cercle contiendrait ce point de tangence; d'où résulte ce théorème : *Etant données deux tangentes à une parabole et son foyer, si l'on fait passer par le foyer un cercle tangent à l'une des tangentes à son point d'intersection avec la seconde, ce cercle passera par le point de contact de la seconde tangente.*

Ces propriétés de la parabole peuvent servir à démontrer un théorème de géométrie assez remarquable qui, à la vérité, pourrait être démontré directement, mais d'une manière beaucoup plus longue. *Si l'on divise une droite indéfinie* AD (*fig.* 32) *en parties égales* AF, FG, *etc., et si par chaque point de division, le point* A *et un point fixe* O, *on fait passer des cercles, ces cercles couperont la droite* AE *en parties égales, pourvu que le point* O *soit tel que l'un de ces cercles soit tangent à la droite* AE : car on peut considérer les droites AD et AE comme étant deux tangentes à une parabole dont O serait le foyer, et les points E et D, déterminés comme on vient de le voir, les deux points de contact; d'où il suit que les droites BC seront des tangentes à cette parabole; mais on sait que si on divise les droites AD et AE en un même nombre de parties égales, et si on joint les points de division dans l'ordre marqué dans la figure, toutes ces droites sont tangentes à la parabole, et il est visible que ces transversales ne sont autres que les différentes cordes BC des cercles passant par les points A et O et chaque point de division de AD.

Il serait facile de démontrer aussi que les rayons de courbure aux points de tangence T et T″ (*fig.* 31), sont entre eux comme les racines cubiques des tangentes BT et BT″.

Nous terminerons en faisant connaître une propriété de l'ellipse dont nous nous contenterons de donner l'énoncé. *Ayant tracé dans une ellipse deux diamètres égaux, si d'un point quelconque de l'ellipse, comme centre, avec un rayon égal à une quatrième proportionnelle au demi-diamètre et aux deux demi-axes, on décrit un cercle, les arcs compris entre les diamètres, seront semblables.*

ADDITION.

Si l'on divise en un même nombre de parties égales deux droites AB *et* AC *faisant un angle quelconque, puis si l'on joint successivement tous les points de division de la première droite, en commençant par* B, *avec les points de division de la seconde, en commençant par* 1, *les intersections de deux droites prises dans l'ordre de ce tracé, seront sur une courbe parabolique* (*fig.* 33).

Joignons les points B et C, par A menons une parallèle AY à BC, que nous prendrons pour l'axe des y, celui des x étant AX mené par A et le milieu H de BC : soient a l'une des divisions égales de AB, b l'une des divisions égales de AC, n le nombre de ces divisions, z le nombre des divisions de AM, $AH=p$, $BH=HC=q$. On aura $AM=az$, $MB=(n-z)a$, $Am=(n-z+1)b$, $mC=(z-1)b$. Les triangles semblables AMP, Amp, ABH donnent

$$AP=\frac{pz}{n},\ PM=\frac{qz}{n},\ Ap=\frac{p(n-z+1)}{n},\ pm=\frac{q(n-z+1)}{n}.$$

On trouve de la même manière $AM'=(z+1)a$, $M'B=(n-z-1)a$, $Am'=(n-z)b$; $m'C=bz$; d'où on conclut, comme ci-dessus,

$$AP'=\frac{p(z+1)}{n},\ P'M'=\frac{q(z+1)}{n},\ Ap'=\frac{p(n-z)}{n},\ p'm'=\frac{q(n-z)}{n}.$$

On aura donc ces équations de Mm et de $M'm'$,

$$y-\frac{qz}{n}=\frac{q(n+1)}{p(2z-n-1)}\left(x-\frac{pz}{n}\right)$$

$$y-\frac{q(z+1)}{n}=\frac{q(n+1)}{p(2z-n+1)}\left(x-\frac{p(z+1)}{n}\right)$$

éliminant z, on trouve

$$pny^2-2q^2(n+1)x+pq^2(n+2)=0$$

Posant $x=x'+\dfrac{p(n+2)}{2(n+1)}$, on obtient enfin

$$y^2=\frac{2q^2(n+1)}{pn}x'$$

Pour $n=\infty$, il vient

$$y^2=\frac{2q^2}{p}x'$$

J. G. G.

Théorèmes sur les sections du cône, et solution de la question proposée page 310 du volume précédent.

Je commencerai par démontrer quelques théorèmes curieux des sections coniques considérées dans le solide, et j'en déduirai comme corollaire, un problème qui a été proposé dans le volume précédent et dont il ne nous est point parvenu de solution.

Soit SA'B' un cône droit (*fig.* 34), et AnB' une ellipse : les cercles AB et A'B' passent par les sommets de l'ellipse, et le cercle *mm'* par le centre. Cela posé, dans le cercle *mnm'*, on a $\overline{Cn}^2 = \overline{mC} \times \overline{m'C}$. Mais *m*C vaut évidemment le rayon du cercle BA ; et C*m'* le rayon du cercle B'A' ; de plus C*n* est le petit axe de l'ellipse B'A. On en déduit que *le demi-petit axe d'une ellipse, est moyen proportionnel entre les rayons des deux cercles qui passent par les extrémités du grand axe.*

Mais on démontre que lorsqu'un quadrilatère est inscriptible dans un cercle, le produit des diagonales vaut la somme des produits des côtés opposés deux à deux. On aura donc, dans le quadrilatère BAA'B',

$$\overline{B'A}^2 = \overline{BB'}^2 + \overline{AB} \times \overline{A'B'},$$

or, nous avons, par ce qui précède, $\overline{AB} \times \overline{A'B'} = 4\overline{Cn}^2$; donc

$$\overline{B'A}^2 = \overline{BB'}^2 + 4\overline{Cn}^2, \text{ ou bien } \overline{BB'}^2 = 4\left(\overline{AC}^2 - \overline{Cn}^2\right).$$

Comme 2AC est le grand axe de l'ellipse et 2C*n* le petit axe, il en résulte que BB' ou *la différence des deux rayons vecteurs menés du sommet du cône aux extrémités du grand axe de l'ellipse, vaut la distance des deux foyers de cette même ellipse.*

Soit maintenant S*t* un rayon vecteur mené du sommet du cône à un point de l'ellipse : nous le représenterons par ρ et d indiquera le rayon vecteur S*n* = S'*m*, mené à l'extrémité du petit axe de l'ellipse. $\rho = d - mt' = d - ci$: mais par la similitude des triangles *cix* et COA, nous aurons

$$\text{CA} : \text{CO} :: \text{C}x : \text{C}i = \frac{\text{CO}.\text{C}x}{\text{CA}} = \frac{ex}{a};$$

e désigne l'excentricité de l'ellipse, égale à CO ou *m*B ; a est le demi

grand axe, et x l'abscisse Cx comptée du centre; en sorte que

$$\rho = d - \frac{ex}{a};$$

mais en conservant les mêmes désignations, et en nommant Z le rayon vecteur mené du foyer de l'ellipse le plus voisin au même point t, l'on a

$$Z = a - \frac{ex}{a}.$$

on déduit de là

$$\rho - Z = d - a$$

conséquemment *si l'on joint un même point d'une ellipse au foyer de cette ellipse et au sommet du cône, la différence des rayons vecteurs est constante, et vaut la distance du sommet du cône à l'extrémité du petit axe de l'ellipse, moins le demi grand axe de cette même ellipse.*

Si l'on mène dans l'ellipse le diamètre tv, il est facile de voir que la valeur du rayon vecteur Sv ou ρ', ne doit différer de celle du rayon St ou ρ, que par le signe de l'abscisse x. On a donc

$$\rho' = d + \frac{ex}{a} \text{ au lieu de } \rho = d - \frac{ex}{a}$$

d'où l'on tire

$$\rho + \rho' = 2d:$$

La somme de deux rayons vecteurs menés du sommet du cône aux extrémités d'un même diamètre de l'ellipse, est donc constante, et vaut le double du rayon vecteur mené à l'extrémité du petit axe de cette ellipse.

Cette propriété est analogue à celle des rayons vecteurs menés dans le plan de l'ellipse, d'un des foyers aux extrémités d'un même diamètre de la courbe.

Les théorèmes précédens modifiés, s'appliquent aux trois espèces de sections coniques. Par exemple, pour l'hyperbole, dans le théorème II, au lieu de la *différence* des deux rayons vecteurs, il faudrait dire la *somme,* en conservant le reste de l'énoncé; et dans le théorème IV, il faudrait dire la *différence* des deux rayons vecteurs, au lieu de la *somme.*

En rapprochant les principes précédens, on arrive à ce théorème que j'ai déjà énoncé ailleurs (page 267, vol. I) : *Tous les cônes droits*

qui ont pour base une section conique, ont leurs sommets sur une autre section conique située dans un plan perpendiculaire à celui de la première, les foyers de l'une de ces courbes servant de sommets à l'autre et réciproquement. On voit aussi par là qu'une section conique a généralement un nombre infini de foyers, mais dont deux seulement se trouvent dans son plan (vol. I, pag. 267 et 355.).

Corollaire. Si l'on regarde l'orbite elliptique de la terre comme la section d'un cône droit, il devient évident par ce qui précède, que le sommet de ce cône, est un point tel que la différence des rayons vecteurs menés du centre de la terre au centre du soleil et à ce point fixe, demeure constamment la même. De plus il existe dans l'espace une infinité de points qui jouissent de la même propriété et qui se trouvent sur une hyperbole qui a ses deux sommets aux foyers de l'écliptique, et ses foyers aux absides.

A. Q.

Solution de la question 3.° *proposée* (I.er vol. de la Corresp. pag. 358), *par M.* P. F. Verhulst, *docteur en sciences à l'Université de Gand.*

Il résulte de l'énoncé de la question, que

$$M+N\sqrt{-1}=\sqrt[n]{\pm Z}=\sqrt[n]{Z}\times\sqrt[n]{\pm 1}$$

Le facteur $\sqrt[n]{\pm 1}$ représentant la racine de l'équation binome....... $y^n \mp 1=0$, peut être mis sous la forme..... cos. $z+\sqrt{-1}$ sin. z: (voyez le *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral de M.* Lacroix, *introduction, page* 114; ou l'*Analyse algébrique de M. le professeur* Garnier.)

En faisant

$$M+N\sqrt{-1}=a\,(\text{cos. } z+\sqrt{-1}\,\text{sin. } z)\ldots\ (A)$$

on obtient par a, cos. z et sin. z les déterminations suivantes

$$a=\sqrt{M^2+N^2},\ \text{cos. } z=\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2}},\ \text{sin. } z=\frac{N}{\sqrt{M^2+N^2}}$$

Substituant ensuite dans l'équation (A), au lieu de a et de $\cos. z + \sqrt{-1} \sin. z$ leurs valeurs $\sqrt{M^2+N^2}$ et $\sqrt[n]{\pm 1}$, on tombe sur le résultat demandé

$$M + N\sqrt{-1} = \sqrt{M^2+N^2} \times \sqrt[n]{\pm 1}.$$

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Sur quelques propriétés nouvelles des caustiques secondaires, déduites des projections stéréographiques.

Je vais essayer de rapprocher la théorie des caustiques secondaires de celle des projections stéréographiques et de montrer avec quelle simplicité et quelle élégance on peut déduire de la combinaison de ces deux théories, plusieurs propositions qui m'ont paru également importantes pour ce qui concerne les courbes en général et les caustiques en particulier. Mais comme la théorie des projections stéréographiques, malgré sa fécondité, est encore généralement bien peu connue, je commencerai par rappeler quelques notions déjà émises dans l'extrait d'un beau travail de M. *Dandelin*, inséré dans le vol. précédent.

On sait que quand on a dans un plan une droite et un cercle, et que de tous les points de la droite on mène deux tangentes à ce cercle, les cordes qui unissent les points de contact, passent toutes par un même point. C'est ce point que nous nommons le *pôle* de la droite, par rapport au cercle donné.

Imaginons maintenant qu'une courbe plane quelconque soit donnée, et qu'on mène toutes ses tangentes : chacune de ces droites aura, par rapport à un même cercle, un point particulier pour pôle et la

suite de tous ces points, formera la *polaire* de la courbe donnée. Celle-ci est à son tour polaire de l'autre.

De même dans l'espace, si l'on a une série de cônes, tous tangens à une sphère et ayant leurs sommets dans un même plan P; les cercles selon lesquels la sphère est touchée, passent tous par un même point qui est le pôle p du plan. On conçoit qu'un second plan P' a aussi son pôle p'. Par suite, tout cône tangent à la sphère et ayant son sommet sur la ligne d'intersection des deux plans P et P', aura son cercle de contact qui passera par la droite qui joint les pôles p et p', et réciproquement. L'une de ces droites est donc polaire par rapport à l'autre.

Si l'un des plans, P par exemple, touchait la sphère, le point de contact p serait son pôle. Delà résulterait que les cônes qui auraient leurs sommets sur la ligne d'intersection des deux plans, auraient tous leurs cercles de contact avec la sphère, qui passeraient par ce point p.

Une surface quelconque a également sa surface polaire, laquelle à son tour a l'autre surface pour polaire.

Cela posé, imaginons une sphère (*fig.* 35) qui ait pour centre le point O et pour rayon OC, puis projetons stéréographiquement sur cette sphère la polaire de la courbe eae' prise par rapport au cercle OC. Toutes les tangentes de cette polaire se projetteront selon des circonférences passant par l'œil et ayant conséquemment leurs pôles dans le plan tangent à la sphère qui passe aussi par l'œil. De plus ces pôles doivent se trouver dans l'espace sur le cylindre droit qui a pour base la courbe eae' proposée et qui est la surface enveloppe des plans verticaux passant par les tangentes à cette courbe (*). Les pôles de nos circonférences seront donc dans le plan qui passe par l'œil et parallèlement au plan de la courbe eae': ils se trouvent de plus sur une courbe parfaitement égale à cette dernière. Il en résulte que si l'on place l'œil dans une seconde position diamétralement opposée à la première, toutes nos circonférences se projetteront selon d'autres circonférences, passant par un même point, ayant leurs centres sur une courbe égale à eae', et ayant de plus

(*) Si l'on pouvait en douter, il suffirait de remarquer que, par rapport à la sphère, b' est le pôle du plan vertical passant par ab, et que réciproquement tout cercle passant par b' a son pôle dans le plan vertical ab.

pour enveloppe la seconde projection stéréographique de la courbe *eae'*.

Nous sommes donc conduits à conclure qu'en plaçant successivement l'œil sur la sphère, aux deux extrémités du diamètre perpendiculaire au plan du cercle OC, *la deuxième projection stéréographique de la polaire d'une courbe, est exactement égale à sa caustique secondaire et réciproquement.*

On a d'ailleurs la faculté de passer, par une marche inverse, de la caustique secondaire d'une courbe à sa polaire. Pour n'en offrir qu'un exemple, rappelons-nous que la caustique secondaire du cercle, est une épicycloïde (*). Lorsqu'on projette stéréographiquement cette épicycloïde sur la sphère, pour la projeter de là une seconde fois stéréographiquement, en plaçant l'œil au sommet, la projection est une section conique (**). Or, la polaire de cette dernière courbe est alors la perspective du cercle donné, dans le plan où s'est fait la dernière projection stéréographique : c'est donc également une section conique. Nous pouvons conclure de ce qui précède que *la polaire d'une section conique, est une autre section conique* (***).

Supposons maintenant qu'on demande la polaire de la courbe *eae'*. On pourra la construire par points de la manière suivante. Au point *a* menons la tangente *ab*, puis sa perpendiculaire *bo* qui passe par le centre du cercle donné *cc'*. Le pôle *b'* se trouvera en menant les deux tangentes *bc* et *bc'*, ainsi que la corde *cc'*. On pourra continuer à construire de la même manière les autres points *b'* de la polaire.

Mais le triangle rectangle *ocb* donne, en nommant *r* le rayon OC,

$$\overline{ob}.\overline{ob'}=r^2.$$

En considérant donc les points *b* et *b'* comme parcourant deux lignes, pendant que la tangente parcourt les divers points de la courbe *eae'*; on pourra regarder les droites *ob* et *ob'* comme des rayons vecteurs de ces lignes et leur produit sera une quantité constante égale à r^2, pour des angles égaux *boe*. Les rayons vecteurs sont donc en rapport

(*) Voyez le mémoire sur les Caustiques inséré dans le III.e vol. des nouveaux mémoires de l'Académie royale de Bruxelles.

(**) Voyez le même mémoire.

(***) M. *Dandelin*, dans un mémoire inédit, est parvenu au même résultat par une marche différente.

inverse : l'un est d'autant plus grand que l'autre est plus petit. Si l'on connaissait donc la polaire de la courbe *eae'*, on aurait facilement son *inverse ebo*, et réciproquement.

Nous allons voir que cette inverse s'obtient d'une manière très-simple. Si l'on double chaque fois le rayon vecteur *ob*, la suite des points B se trouvera sur une courbe exactement semblable à l'inverse *ebo :* mais cette courbe ici ne sera autre que la caustique secondaire de la courbe proposée *eae'*. Donc *la polaire d'une courbe donnée, a pour inverse une courbe semblable à la caustique secondaire de la proposée*. Il est inutile d'ajouter que la polaire, toujours semblable à elle-même, varie de dimensions en même-temps que le rayon *r*.

Si l'on rapproche ce dernier principe de celui qui a été posé plus haut, on pourra conclure ce qui suit : *une courbe plane quelconque, après avoir subi deux projections stéréographiques successives, devient semblable à son inverse*. Pour prendre un exemple de ceci, supposons une parabole ; son inverse, comme je l'ai déjà démontré ailleurs (*), est la cissoïde de *Dioclès*. L'une de ces courbes peut donc se transformer dans l'autre après deux projections stéréographiques, comme je l'ai d'ailleurs fait voir dans mon premier mémoire sur les caustiques. D'une autre part, l'une de ces courbes peut être regardée comme la caustique secondaire d'une troisième ligne qui aurait pour polaire l'autre courbe, mais avec un paramètre double.

Si nous n'avions pas déjà vu que le cercle a pour polaire une section conique, nous pourrions le démontrer très-simplement de la manière suivante. La caustique secondaire du cercle a généralement pour équation polaire

$$\rho = 2r \cos. \alpha \pm m :$$

l'inverse de cette courbe, aura donc pour équation polaire

$$\rho' = \frac{r'}{2r \cos. \alpha \pm m}.$$

On reconnaît facilement l'équation polaire d'une section conique ramenée à son foyer. Nous ne nous arrêterons pas à discuter cet exemple particulier.

(*) Corresp. math. tome I, page 267.

Il est assez remarquable que l'inverse d'une focale régulière, est une autre focale parfaitement égale, mais dans une position opposée.

Nous dirons maintenant quelques mots des caustiques secondaires et de leurs développées qui sont les caustiques ordinaires.

Supposons qu'une courbe soit rapportée à des coordonnées polaires, et qu'on mène à l'un des points de cette courbe son rayon vecteur, sa tangente et sa sous-tangente. Ces trois droites, comme on sait, formeront ensemble un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit est un point fixe qu'on a choisi pour pôle : tandis que le second sommet parcourt la courbe proposée, le troisième parcourt aussi une ligne dont tous les rayons vecteurs sont les sous-tangentes de l'autre. Or, le calcul différentiel donne une méthode très-simple pour déterminer la courbe des soutangentes d'une courbe quelconque ramenée à des coordonnées polaires.

Voici maintenant de quelles propriétés jouissent deux courbes pareilles, comme on le reconnaîtra facilement. Si l'on construit deux séries de cercles assujétis à passer tous par le pôle des deux courbes et à avoir leurs centres sur ces deux courbes, ces cercles se couperont tous mutuellement à angle droit. Nous observerons de plus que ces deux séries de cercles auront pour lignes enveloppes la caustique secondaire de la courbe proposée et celle de la ligne des sous-tangentes, le point rayonnant étant au pôle commun de ces deux courbes. D'une autre part; *les cercles d'une série couperont orthogonalement la ligne enveloppe des cercles de la seconde série, qui ont leurs centres sur la courbe proposée.*

Ce qui précède étant admis, concevons une sphère tangente au plan des courbes et au point rayonnant; puis projetons stéréographiquement sur cette sphère les deux caustiques secondaires, avec les deux séries de cercles qu'elles enveloppent. Ces deux séries de cercles auront évidemment leurs pôles encore dans le même plan tangent à la sphère et sur les deux courbes qui étaient les lieux des centres. Si alors on projette une seconde fois stéréographiquement toutes les lignes déjà projetées, en plaçant l'œil au point rayonnant primitif, par où passent actuellement tous les cercles enveloppés, il arrivera ce qui suit : les deux caustiques secondaires projetées pour la seconde fois, seront deux courbes qui auront pour tangentes, les deux séries de circonférences qui se sont transformées en droites; et comme d'ailleurs ces

tangentes continuent à se couper à angle droit sur une des courbes, celle-ci est la développante de l'autre. En partant de ce qui vient d'être dit, on pourra donc conclure encore qu'*une courbe et sa développée, après deux projections stéréographiques, peuvent devenir les caustiques secondaires de deux courbes dont l'une est la courbe des sous-tangentes par rapport à l'autre et réciproquement.*

Ce qui précède pourra peut-être donner une nouvelle idée de la manière de combiner ensemble la théorie des projections stéréographiques et celle des caustiques secondaires. Des mains plus habiles parviendront sans doute à en déduire encore une foule d'aperçus nouveaux et à établir des rapports entre des courbes connues qui semblaient n'en avoir aucuns; par là, le vaste domaine de la science acquiert une nouvelle étendue, en devenant cependant plus facile à embrasser, puisqu'on peut porter les propriétés d'une courbe connue à une autre qui est plus compliquée, en suivant pour ainsi dire de l'œil, les lignes sous toutes les formes différentes qu'elles peuvent affecter.

A. Q.

Applications analytiques de ce qui précède; et solution du problème 2° proposé pag. 32 du 1.er vol.

L'équation en coordonnées rectangulaires d'une courbe quelconque, étant

$$f(x',y')=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

on a pour équation de la tangente, en un point dont les coordonnées sont x' et y'

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x') \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Si de l'origine on abaisse une perpendiculaire à cette droite, son équation sera

$$y=-\frac{dx'}{dy'}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Si maintenant on élimine des équations précédentes, les coordonnées

x' et y', il restera une équation entre x et y qui sera l'équation de l'inverse de la polaire de la courbe proposée, le pôle étant à l'origine des coordonnées. Cette équation sera généralement de cette forme :

$$\varphi\,(x,y)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Si l'on double les coordonnées, en faisant $X=2x$, $Y=2y$; on aura pour l'équation de la caustique secondaire de la proposée :

$$\varphi\,(X,Y)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Enfin on pourra encore par un moyen très-simple déduire de l'équation (4), celle de la polaire de la courbe proposée. En effet, nommons les coordonnées pour cette polaire x'' et y'' et les rayons vecteurs correspondans pour les deux courbes, ρ et ρ'', nous aurons

$$\rho : \rho'' = x : x'' = y : y''.$$

On a d'ailleurs d'après ce qui a été dit plus haut

$$\rho\rho''=r^2,\ \text{ou bien}\ \rho=\frac{r^2}{\rho''}.$$

r est le rayon du cercle auquel on rapporte la polaire. On aura donc aussi

$$x=\frac{x''r^2}{x''^2+y''^2},\quad y=\frac{x''r^2}{x''^2+y''^2}.$$

On obtiendra facilement par la substitution de ces valeurs dans l'équation (4), l'équation de la polaire de la proposée :

$$F\,(x'',y'')=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Appliquons ce qui précède à un exemple; prenons la parabole dont l'équation est

$$y'^2=2px'.$$

L'équation (2) sera

$$y-y'=\frac{p}{y'}\,(x-x');$$

et l'équation (3)

$$y=-\frac{y'}{p}\,x.$$

L'élimination de x' et y', entre ces trois équations, donnera l'équation (4)

$$y^2=-\frac{2x^3}{p+2x}.$$

Ce qui montre que l'inverse de la parabole est une cissoïde qui a pour asymptote la directrice de la parabole.

Pour passer à l'équation de la caustique secondaire de la parabole, le point rayonnant étant à son sommet, on n'a qu'à doubler les ordonnées et les abscisses dans l'équation précédente, pour satisfaire à la condition $\varphi(X,Y)=0$, et l'on aura encore l'équation d'une cissoïde

$$Y^2=-\frac{X^3}{p+X}.$$

Si maintenant on cherche la polaire de la parabole, il faudra pour parvenir à l'équation (6), satisfaire aux conditions indiquées, et l'on arrive, toute réduction faite, à ce résultat :

$$y''^2=-\frac{r^2}{p}x'' :$$

on voit que la polaire d'une parabole est une autre parabole qui a même axe et même sommet, lorsque le sommet sert de pôle.

Si l'on cherchait la caustique secondaire d'une cissoïde éclairée par un point lumineux qui se trouve à son point de rebroussement, on formerait les équations (1), (2) et (3), qui seraient

$$x'^2=\frac{y'^3}{2-y'}$$

$$Y-y'=\frac{2(2-y')x'}{3y'^2+x'^2}(X-x')$$

$$Y=-\frac{3y'^2+x'^2}{2x'(2-y')}X$$

et en éliminant entre ces équations les quantités x' et y', il resterait une équation en x et y qui serait semblable à celle de la courbe demandée. Il ne s'agirait plus que de substituer à X et Y les quantités $2X'$ et $2Y'$.

A. Q.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Sur les limites des séries de Taylor et de Maclaurin.

Si a est une constante, si les fonctions $f'(a-x)$, $f''(a-x)$ $f'''(a-x)$ etc. désignent les coefficiens différentiels $\frac{d.f(a-x)}{dx}$, $\frac{d^2.f(a-x)}{dx^2}$, $\frac{d^3.f(a-x)}{dx^3}$ etc., et que $\int \frac{x^3}{1.2.3} dxf''''(a-x)$ indique l'intégrale de $\frac{x^3}{1.2.3} dxf''''(a-x)$, je dis qu'on aura l'identité

$$f(a)=f(a-x)+xf'(a-x)+\frac{x^2}{1.2}f''(a-x)$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(a-x)+\int\frac{x^3}{1.2.3}dxf''''(a-x)\dots (1)$$

En effet, si on différentie de part et d'autre par rapport à x, et qu'on ne retienne que les coefficiens différentiels, on trouvera

$$0=-f'(a-x)-xf''(a-x)-\frac{x^2}{1.2}f'''(a-x)-\frac{x^3}{1.2.3}f''''(a-x)$$
$$+f'(a-x)+xf''(a-x)+\frac{x^2}{1.2}f'''(a-x)+\frac{x^3}{1.2.3}f''''(a-x)$$

d'où on conclut l'exactitude de la formule (1), et, en général, celle de la suivante

$$fa=f(a-x)+xf'(a-x)+\frac{x^2}{1.2}f''(a-x)+\dots+\frac{x^m}{1.2\dots m}\overset{(m)}{f}(a-x)$$
$$+\int\frac{x^m}{1.2\dots m}dx\overset{(m+1)}{f}(a-x)\dots\dots\dots\dots (2)$$

Cependant, à raison de l'importance de cette formule, il est bon de l'établir directement. Voici la démonstration qui m'a été communiquée

dans le temps, par M. *Fourier*, aujourd'hui l'un des secrétaires perpétuels de l'Académie des sciences de France (*).

Soient u et v deux fonctions de x : on aura, en intégrant par parties,

$$\int udv = C + uv - \int vdu \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

C étant une constante arbitraire. Si l'on veut pareillement développer l'intégrale indiquée $\int vdu$, c'est-à-dire, la décomposer en deux termes, on posera $du = u'dx$ et $\int vdx = {}'v$, ce qui donnera

$$\int vdu = \int u' . {}'vdx = u'\,{}'v - \int {}'vdu'$$

donc

$$-\int vdu = -u'\,{}'v + \int {}'vdu'$$

et conséquemment la formule (3) devient

$$\int udv = C + uv - u'\,{}'v + \int {}'vdu' \ldots\ldots \quad (4)$$

Qu'on pose $du' = u''dx, \int {}'vdx = {}''v$, et on aura

$$\int {}'vdu' = \int u''\,{}'vdx = u''\,{}''v - \int {}''vdu''$$

partant

$$\int udv = C + uv - u'\,{}'v + u''\,{}''v - \int {}''vdu'' \ldots \quad (5)$$

On pourra encore faire $du'' = u'''dx, \int {}''vdx = {}'''v$, et on trouvera

$$\int udv = C + uv - u'\,{}'v + u''\,{}''v - u'''\,{}'''v + \int {}'''vdu''' \ldots \quad (6)$$

en observant qu'on ne doit ajouter que la seule constante C, parce que les intégrations par parties ne servent qu'à développer $\int vdu$.

Faisons dans (3) $dv = dx$, $u = \phi'(a-x)$: cette formule donnera

$$\int dx\phi'(a-x) = C + x\phi'(a-x) + \int xdx\phi''(a-x),$$

à cause de $du = -dx\,\phi''(a-x)$. Mais $\int dx\,\phi'(a-x) = -\phi(a-x)$; donc l'identité précédente devient

$$-\phi(a-x) = C + x\phi'(a-x) + \int xdx\,\phi''(a-x).$$

Si l'intégrale $\int xdx\,\phi''(a-x)$ doit s'évanouir pour $x = 0$, on aura

(*) Elle est extraite de mes leçons d'*Analyse algébrique, différentielle et intégrale*, à l'Ecole Polytechnique, in-4.°, publié en l'an IX.

$C = -\varphi a$, et delà

$$-\varphi(a-x) = -\varphi a + x\varphi'(a-x) + \int x dx\, \varphi''(a-x)$$

d'où l'on tire

$$\varphi a = \varphi(a-x) + x\varphi'(a-x) + \int x dx\, \varphi''(a-x).$$

Si l'on exécute en partie $\int x dx\, \varphi''(a-x)$, on trouvera

$$\int x dx\, \varphi''(a-x) = \frac{x^2}{1.2}\varphi''(a-x) + \int \frac{x^2 dx}{1.2}\varphi'''(a-x)$$

et pareillement

$$\int \frac{x^2 dx}{1.2}\varphi'''(a-x) = \frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(a-x) + \int \frac{x^3 dx}{1.2.3}\varphi''''(a-x)$$

donc enfin

$$\varphi a = \varphi(a-x) + x\varphi'(a-x) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(a-x) + \frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(a-x)$$
$$+ \int \frac{x^3 dx}{1.2.3}\varphi''''(a-x) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Si l'on éloigne indéfiniment le terme intégral, si l'on écrit $a+x$ pour a et qu'on change ensuite a en x et x en i, on retombe sur le théorème de *Taylor*.

On a donc généralement l'identité annoncée

$$\varphi a = \varphi(a-x) + x\varphi'(a-x) + \ldots\ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m}\overset{(m)}{\varphi}(a-x)$$
$$+ \int \frac{x^m dx}{1.2\ldots m}\overset{(m+1)}{\varphi}(a-x)$$

maintenant que dans le terme intégral $\int \frac{x^m dx}{1.2\ldots m}\overset{(m+1)}{\varphi}(a-x)$, on remplace le facteur $\overset{(m+1)}{\varphi}(a-x)$ par une constante M plus grande que la plus grande de toutes les valeurs que peut prendre $\overset{(m+1)}{\varphi}(a-x)$, en faisant varier x depuis zéro, jusqu'à sa valeur actuelle x : il arrivera que $\int M \frac{x^m dx}{1.2\ldots m} = M \frac{x^{m+1}}{1.2\ldots m(m+1)}$ surpassera la plus grande des valeurs de l'intégrale, dans les mêmes

limites. Pareillement que l'on écrive au lieu de $\varphi^{(m+1)}(a-x)$ la constante N égale à la plus petite des valeurs que reçoit $\overset{(m+1)}{\varphi}(a-x)$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$, et on trouvera N $\frac{x^{m+1}}{1.2\ldots m(m+1)}$ quantité moindre que la plus petite valeur de l'intégrale. Ainsi la véritable valeur de $\int\frac{x^m dx}{1.2\ldots m}\overset{(m+1)}{\varphi}(a-x)$, est égale au produit $\frac{x^{m+1}}{1.2\ldots m(m+1)}$ par une quantité intermédiaire entre M et N, qui répond à une valeur de $\overset{(m+1)}{\varphi}(a-x)$, intermédiaire entre celles qui répondent à $x=0$ et $x=x$: on peut la représenter par $\overset{(m+1)}{\varphi}[a-(x-j)]$; ce qui donnera cette valeur exacte du développement

$$\varphi a=\varphi(a-x)+x\varphi'(a-x)+\ldots\ldots\ldots+\frac{x^m}{1.2\ldots m}\overset{(m)}{\varphi}(a-x)$$
$$+\frac{x^{m+1}}{1.2\ldots m(m+1)}\overset{(m+1)}{\varphi}[a-(x-j)]$$

Que l'on change a en $a+x$, et il viendra

$$\varphi(a+x)=\varphi a+x\varphi' a+\ldots\ldots\ldots+\frac{x^m}{1.2\ldots m}\overset{(m)}{\varphi}a$$
$$+\frac{x^{m+1}}{1.2\ldots m(m+1)}\overset{(m+1)}{\varphi}(a+j)$$

Enfin si l'on écrit x au lieu de a et i pour x, on obtiendra

$$\varphi(x+i)=\varphi x+i\varphi' x+\ldots\ldots\ldots+\frac{i^m}{1.2\ldots m}\overset{(m)}{\varphi}x$$
$$+\frac{i^{m+1}}{1.2\ldots m(m+1)}\overset{(m+1)}{\varphi}(x+j)\ldots\ (8)$$

où $\frac{i^{m+1}}{1.2\ldots m(m+1)}\overset{(m+1)}{\varphi}(x+j)$ représente la somme de tous les termes de la série de *Taylor* qui suivent le terme $\frac{i^m}{1.2\ldots m}\overset{(m)}{\varphi}x$.

Si dans (8), on fait $x=0$, on aura le théorème analogue pour la série de *Maclaurin*.

De toutes les démonstrations du théorème de *Taylor*, une des plus simples est la suivante due à M. *Ampère*. Il pose

$$f(x+i)=y+\mathrm{P}i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$\mathrm{P}i$ étant un terme sommatoire, et P une fonction de x et de i qui ne devient ni nulle ni infinie pour $i=0$, la variable x restant indéterminée : remplaçant $x+i$ par h, et conséquemment i par $h-x$, il vient

$$fh=y+\mathrm{P}(h-x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en observant que y ne renferme pas i. Prenant les dérivées successives, en ne faisant varier que x, et posant $\frac{dy}{dx}=y'$, $\frac{dy'}{dx}=y''$ etc., $\frac{d\mathrm{P}}{dx}=\mathrm{P}'$, $\frac{d\mathrm{P}'}{dx}=\mathrm{P}''$... il obtient

$$\left.\begin{array}{l} 0=y'+\mathrm{P}'(h-x)-\mathrm{P} \\ 0=y''+\mathrm{P}''(h-x)-2\mathrm{P}' \\ 0=y'''+\mathrm{P}'''(h-x)-3\mathrm{P}'' \\ 0=y''''+\mathrm{P}''''(h-x)-4\mathrm{P}''' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} \mathrm{P}=y'+\mathrm{P}'(h-x) \\ \mathrm{P}'=\frac{1}{2}y''+\frac{1}{2}\mathrm{P}''(h-x) \\ \mathrm{P}''=\frac{1}{3}y'''+\frac{1}{3}\mathrm{P}'''(h-x) \\ \mathrm{P}'''=\frac{1}{4}y''''+\frac{1}{4}\mathrm{P}''''(h-x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Faisant ces substitutions dans (2), et remplaçant h par $x+i$, on tombe sur la formule connue

$$f(x+i)=y+y'i+y''\frac{i^2}{1.2}+y'''\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

J. G. G.

MÉCANIQUE.

II.me *Partie du mémoire de M.* M. G. Pagani, *sur le principe des vitesses virtuelles etc.* (2.e *volume de la* Corresp. *pag.* 19 *et suiv.*)

Application du principe des vitesses virtuelles à la recherche des lois générales de la Mécanique.

Lagrange a démontré le premier que toutes les lois et les propriétés générales de la mécanique, n'étaient que des corollaires assez simples du principe des vitesses virtuelles, traduit en langage algébrique. Mais on peut encore simplifier, en quelque sorte, ce que *Lagrange* a démontré, en faisant voir que tous ces corollaires se déduisent immédiatement de deux transformations générales de l'équation fondamentale de la mécanique. Pour cela, il a fallu d'abord trouver les formules générales pour exprimer les variations infiniment petites des coordonnées d'un corps solide, lorsqu'on le déplace tant soit peu et d'une manière arbitraire de sa position primitive. Ces formules données premièrement par *Euler* et ensuite par *Lagrange*, peuvent s'obtenir d'une manière très-simple en partant de ce principe; savoir : que les variations des coordonnées seront les mêmes, soit que l'on déplace infiniment peu le corps, soit que l'on change infiniment peu la position des axes. Or, c'est en s'appuyant sur cette considération que l'auteur est parvenu directement aux formules connues ; voici sa démonstration.

Rapportons la position d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un corps solide, à des coordonnées rectangles x, y, z. Imaginons maintenant un nouveau système de coordonnées rectangles, placé comme on voudra par rapport au premier, et soient x', y', z' les nouvelles coordonnées du point m; on aura

$$\left.\begin{aligned} x' &= n + px + qy + rz, \\ y' &= n' + p'x + q'y + r'z, \\ z' &= n'' + p''x + q''y + r''z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

les indéterminées n, p, q, etc., devront satisfaire aux conditions

$$\left.\begin{array}{l} p^2+q^2+r^2=1,\ p'^2+q'^2+r'^2=1,\ p''^2+q''^2+r''^2=1 \\ pq+p'q'+p''q''=0, pr+p'r'+p''r''=0, qr+q'r'+q''r''=0 \end{array}\right\}(2)$$

Soient maintenant x'', y'', z'' trois nouvelles coordonnées du point m rapporté à trois axes rectangles infiniment près de ceux des x', y', z'; nous aurons visiblement

$$\left.\begin{array}{l} x''=n+dn+(p+dp)x+(q+dq)y+(r+dr)z \\ y''=n'+dn'+(p'+dp')x+(q'+dq')y+(r'+dr')z \\ z''=n''+dn''+(p''+dp'')x+(q''+dq'')y+(r''+dr'')z \end{array}\right\}(3)$$

de même

$$\left.\begin{array}{l} (p+dp)^2+(q+dq)^2+(r+dr)^2=1 \\ (p'+dp')^2+(q'+dq')^2+(r'+dr')^2=1 \\ (p''+dp'')^2+(q''+dq'')^2+(r''+dr'')^2=1 \\ (p+dp)(q+dq)+(p'+dp')(q'+dq')+(p''+dp'')(q''+dq'')=0 \\ (p+dp)(r+dr)+(p'+dp')(r'+dr')+(p''+dp'')(r''+dr'')=0 \\ (q+dq)(r+dr)+(q'+dq')(r'+dr')+(q''+dq'')(r''+dr'')=0 \end{array}\right\}(4)$$

Mais en ayant égard aux équations (2) et en négligeant les infiniment petits du second ordre, les équations (4) se réduisent facilement aux suivantes

$$\left.\begin{array}{r} pdp+qdq+rdr=0,\ p'dp'+q'dq'+r'dr'=0 \\ p''dp''+q''dq''+r''dr''=0 \\ pdq+qdp+p'dq'+q'dp'+p''dq''+q''dp''=0 \\ pdr+rdp+p'dr'+r'dp'+p''dr''+r''dp''=0 \\ pdr+rdq+q'dr'+r'dq'+q''dr''+r''dq''=0 \end{array}\right\}\ldots (5)$$

En retranchant, membre à membre, les équations (1) des équations (3), et en observant que l'on a $x''-x'=dx'$, $y''-y'=dy'$, $z''-z'=dz'$, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} dx'=dn+xdp+ydq+zdr \\ dy'=dn'+xdp'+ydq'+zdr' \\ dz'=dn''+xdp''+ydq''+zdr'' \end{array}\right\}\ldots\ldots (6)$$

Si nous supposons que les axes des x', y', z' coïncident avec ceux

des x, y, z, ou si nous faisons $x' = x, y' = y, z' = z$, les formules (1) nous donneront

$$\begin{array}{llll} n = 0, & p = 1, & q = 0, & r = 0 \\ n' = 0, & p' = 0, & q' = 1, & r' = 0 \\ n'' = 0, & p'' = 0, & q'' = 0, & r'' = 1. \end{array}$$

Ces valeurs étant substituées dans les équations (5), elles se réduiront simplement aux suivantes

$$\begin{array}{lll} dp = 0, & dq' = 0, & dr'' = 0 \\ dq + dp' = 0, & dr + dp'' = 0, & dr' + dq'' = 0. \end{array}$$

En ayant égard à ces dernières relations, les formules (6) pourront être mises sous cette forme

$$\left.\begin{array}{l} dx = dn + ydq + zdr \\ dy = dn' - xdq + zdr' \\ dz = dn'' - xdr - ydr' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

Ces formules sont précisément celles qu'*Euler* a données le premier, et si nous observons que les différentielles dn, dn', dn'', dq, dr et dr' sont des quantités indépendantes et absolument arbitraires, on pourra faire

$$\begin{array}{lll} dn = \delta\xi, & dn' = \delta v, & dn'' = \delta\zeta \\ dq = -\delta\omega, & dr = \delta\psi, & dr' = -\delta\varphi \end{array}$$

alors, les formules (7) se changeront dans celles-ci

$$\left.\begin{array}{l} \delta x = \delta\xi - y\delta\omega + z\delta\psi \\ \delta y = \delta v + x\delta\omega - z\delta\varphi \\ \delta z = \delta\zeta - x\delta\psi + y\delta\varphi \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

que l'on trouve dans la *Mécanique analytique*.

Cela posé, la formule générale de la mécanique qui se déduit du principe des vitesses virtuelles, peut facilement être mise sous la forme suivante

$$S\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)\delta z\right] Dm = 0 .. (9)$$

(Voyez *Mécanique analytique*, pag. 258.)

Substituons dans l'équation (9) les valeurs des variations δx, δy

et δz, données par les formules (8), et nous aurons la transformée suivante

$$o = \delta\xi . S\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)Dm + \delta\nu . S\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)Dm + \delta\zeta . S\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)Dm$$

$$(10)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} &+ \delta\omega . S\left(\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} + xY - yX\right)Dm \\ &+ \delta\psi . S\left(\frac{zd^2x - xd^2z}{dt^2} + zX - xZ\right)Dm \\ &+ \delta\varphi . S\left(\frac{yd^2z - zd^2y}{dt^2} + yZ - zY\right)Dm \end{aligned}\right.$$

Cette dernière équation est propre à faire découvrir toutes les lois générales de l'équilibre et du mouvement, et elle sert, en même temps, à la détermination des conditions nécessaires à l'équilibre d'un système quelconque. La théorie des *momens*, la considération des *mouvemens de translation et de rotation autour des axes*, *la conservation du mouvement du centre de gravité*, ne sont que des corollaires de l'équation (10) [*].

ASTRONOMIE.

Problême du plus court crépuscule, solution par M. G. Dandelin, *professeur à l'Université de Liège.*

Si la terre n'était qu'un globe nu et sans atmosphère, aussitôt que le soleil aurait atteint l'horizon d'un lieu, l'intervalle entre le jour et la nuit ne serait que d'une durée infiniment courte, et l'un de ces deux états succéderait brusquement à l'autre. Mais il n'en est pas ainsi : les couches de l'atmosphère, à cause de leur pouvoir refringent, renvoyent encore vers nos yeux quelques-uns des rayons du soleil, long-temps après que cet astre a passé sous l'horizon. Cette espèce

(*) C'est la démonstration avec quelques applications de la formule (9) qui fait l'énoncé de la question mise au concours par la Faculté des Sciences de l'Université de Gand. (Vol. I, de la Corresp. math. et phys. pag. 251.) J. G. G.

de demi-jour appelé *crépuscule* ou *aurore*, suivant qu'il suit ou précède le jour, a lieu aussi long-temps que l'abaissement du soleil, mesuré sur un arc perpendiculaire à l'horizon, ne dépasse pas environ 18° au-dessous de ce cercle. On conçoit donc au-dessous de l'horizon d'un lieu et du côté de son nadir, un plan parallèle à l'horizon et distant de celui-ci d'une quantité proportionnelle au sinus de cet angle de 18° et quelques minutes. Tant que le soleil représenté par un point placé sur la surface de la sphère terrestre, chemine entre les deux cercles suivant lesquels la terre coupe les deux plans dont nous venons de parler, il y a crépuscule : il est jour, quand il est au-dessus du supérieur; et nuit, quand il est au-dessous de l'inférieur que nous appellerons cercle *crépusculaire*.

Le soleil étant par son cours assujetti à se mouvoir plus ou moins obliquement entre ces deux cercles, on conçoit que la durée du crépuscule doit varier d'un lieu à un autre, suivant les latitudes; mais en outre, à cause de son mouvement apparent d'aller et de venir entre les deux tropiques, il doit, en général, varier pour chaque latitude entre un solstice et l'autre. Le problême que nous nous sommes proposé, a pour but de déterminer, pour un lieu quelconque, la plus petite valeur angulaire du cours solaire entre l'horizon et le cercle crépusculaire, puisque cette valeur mesure évidemment la durée du crépuscule.

Pour cela, prenons un des pôles de la sphère terrestre pour position de l'œil, et projettons stéréographiquement tout ce système (*fig.* 36) : tous les cercles décrits par le soleil seront représentés par d'autres cercles ayant un centre commun A'. Le cercle crépusculaire et l'horizon se projettent suivant des cercles C' et H', et il est évident que, pour le jour où le soleil décrira le cercle $\alpha\gamma$, la durée du crépuscule sera proportionnelle à l'angle $\alpha'A'\gamma'$. Cherchons les conditions pour que cet angle soit un minimum.

Soit, à cet effet, un autre cercle infiniment voisin $\delta'\beta'\varphi'$ perspective du cercle $\delta\beta\varphi$ aussi décrit par le soleil : pour que l'angle $\alpha'A'\gamma'$ soit un minimum, il faut que sa différentielle c'est-à-dire $\delta'A'\beta'-\alpha'A'\gamma'$ soit nulle. Ce qui exige que les angles $\delta'A'\gamma'$ et $\alpha'A'\beta'$ et par conséquent les triangles $\delta'A'\gamma'$ et $\alpha'A'\beta'$ soient égaux et placés de la même manière. Les angles $\alpha'\beta'A'$ et $\gamma'\delta'A'$ sont donc égaux : mais ces angles sont ceux formés par les rayons $A'\beta'$, $A'\delta'$ avec les élémens $\beta'\alpha'$, $\delta'\gamma'$ des cercles H' et C' et β' et δ'. Ces angles sont donc égaux et comme

ils sont les complémens de ceux suivant lesquels les cercles H′ et C′ sont coupés par le cercle $\mathfrak{C}'\delta'\varphi'$, on voit que *le cercle cherché parmi ceux que décrit le soleil, est celui qui coupe l'horizon et le cercle crépusculaire sous des angles égaux.*

Pour le trouver, on fera donc passer par l'horizon du lieu et son cercle crépusculaire, un cône dont le sommet sera entre les plans de ces deux cercles, puis par le sommet de ce cône, on mènera un plan parallèle à l'équateur, et le cercle décrit par ce plan sur la sphère, sera la route du soleil, le jour du plus court crépuscule : car ce cercle coupera le cercle crépusculaire et l'horizon sous des angles égaux (*).

(*) Il sera bon de se rappeler ici ce qui a été dit dans les extraits du mémoire de M. *Dandelin*, qui se trouvent insérés dans le premier vol. pag. 256 et 316; et particulièrement dans le N.° VII, pag. 318. Le problème du plus court crépuscule a beaucoup occupé les mathématiciens. Il paraît que la première solution en a été donnée par le géomètre portugais *Nonius*, le même à qui l'on attribue l'ingénieuse méthode pour rendre sensibles les plus petites subdivisions des instrumens. *Jacques Bernoulli* en a également donné une solution et ce grand Géomètre avoue qu'il n'y est point parvenu sans peine.

A. Q.

Nous ajouterons quelques mots à la note précédente. Le mémoire de *Nonius de Crepusculis*, a été imprimé à Coimbre, en 1573. *Jean Bernoulli* dit : « J'ai » résolu le problème de trouver géométriquement le jour du plus petit crépuscule, » ce qui a occupé mon frère, professeur de mathématiques à Bâle et moi, depuis » plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout : il énonce sa règle en ces » termes : *comme le rayon est à la tangente de la moitié de l'arc crépusculaire,* » (qu'on suppose de 18° pour Paris), *ainsi le sinus de l'élévation du pôle, est* » *au sinus de la déclinaison méridionale cherchée du soleil.* » On en trouve des solutions synthétiques dans les *leçons de Keill* et les *institutions astronomiques de Lemonnier :* voyez encore *l'astronomie de Delambre,* tom. I, pag. 341 et suiv. En appliquant le calcul à la construction de *M. Monge*, qu'il propose de démontrer, M. *Hachette* parvient à cette formule très-simple

$$Ag = \sin. \psi \tan. \left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

dans laquelle Ag est le sinus de la déclinaison du soleil, le jour du plus petit crépuscule, ψ l'élévation du pôle, φ l'arc crépusculaire : cette équation ramène à la proportion de *Bernoulli*. (Corresp. sur l'Ecole Polyt. tom. I, pag. 148.)

J. G. G.

Cette solution très-simple se rapproche pour le fond de celle de *Monge;* mais les moyens qui nous y ont conduit étant tout nouveaux, nous avons pensé qu'on la verrait avec plaisir.

PHYSIQUE.

Résumé des observations météorologiques faites dans le Brabant-Méridional, pendant plusieurs années (*).

État des vents, pendant le cours d'une année moyenne.

INDICATION des mois.	VENTS				VENT			
	S. à l'O.	O. au N	N. à l'E.	E. au S.	Ordin.	Fort.	Viol.	Ourag.
Janv., 31	12	8	10	1	20	8	2	1
Févr., 28	17	5	5	1	12	11	3	2
Mars, 31	17	6	7	1	15	9	5	2
Avril, 30	10	9	11	0	19	10	1	0
Mai, 31	14	8	7	2	24	6	1	0
Juin, 30	11	7	8	4	26	2	2	0
Juillet, 31	13	6	7	5	29	2	0	0
Août, 31	15	7	5	4	29	2	0	0
Sept., 30	9	9	10	2	22	5	3	0
Octob., 31	18	6	6	1	14	12	3	2
Nov., 30	16	4	9	1	14	8	6	2
Déc., 31	14	9	7	1	21	6	3	1
TOTAL 365	166	84	92	23	245	81	29	10
moy.e 30,4	13,8	7	7,7	1,9	20,4	6,8	2,4	0,8

(*) La plupart des observations que nous donnons, sont extraites d'un mémoire très-étendu sur la géographie physique du Brabant méridional, que M. *Kickx* a inséré dans les mém. de l'Acad. de Brux. (Corr. tom. II, pag. 52); de sorte que cet article ne doit en être considéré que comme le résumé.

A. Q.

On voit par ce tableau, que les vents du sud à l'ouest règnent d'une manière assez régulière pendant près de la moitié de l'année; les vents de l'est au sud sont les plus rares et amènent ordinairement de violents orages. M. *Kickx*, afin d'établir des termes comparables, a nommé vent *ordinaire* celui qui souffle pendant la majeure partie de l'année, et sa vitesse peut être estimée de deux à trois lieues par heure; vent *fort*, celui qui fait de cinq à six lieues par heure; vent *violent*, celui qui en parcourt huit à neuf, et enfin *ouragan*, le vent qui fait au moins douze lieues par heure; c'est d'après cette estimation, que la seconde partie du tableau précédent a été construite.

Il serait curieux de comparer à ces résultats généraux ceux qui ont été obtenus dans d'autres pays. Ceux qu'on trouve dans les Annales de Physique et de Chimie pour 1825, s'accordent assez bien avec les précédens; mais Paris est trop rapproché de Bruxelles pour qu'on puisse observer à cet égard quelque différence remarquable. Dans les transactions de Philadelphie pour 1825, on trouve un tableau des vents pour Washington, pendant les années 1823 et 1824: mais entièrement discordant avec celui qui se trouve plus haut. C'est le vent du sud à l'est qui y prédomine, et les vents du sud à l'ouest, sont les moins fréquens. On trouve dans les mêmes transactions, les résultats des observations faites sur l'Océan atlantique durant l'espace de 18 ans et pendant vingt-six traversées, principalement entre Philadelphie et Liverpool, par M. *Hamilton* : il en résulte que sur 2029 jours, il faut en compter 208 de vent de nord; 167 de vent de sud; 361 de vent d'est; 1101 de vent d'ouest et 192 variable. C'est en réunissant un grand nombre de documens semblables et en les comparant, que l'on pourra peut être un jour démêler quelques lois encore inconnues au milieu de résultats en apparence si variables. Peut être serait-il bon, pour saisir une longue suite d'observations d'un seul coup d'œil, de représenter les variations des vents par les sinuosités d'une courbe. On pourrait s'y prendre de la manière suivante : concevons une circonférence partagée en parties égales, par exemple en 360, et supposons encore qu'elle serve de base à un cylindre droit dont la surface est partagée de la même manière par des droites parallèles. La surface de ce cylindre développée présentera la figure 37 : NN est la circonférence développée et le rectangle NN'N'N (*fig.* 38) est le développement du cylindre. Cela posé, mettons en face des degrés, les

noms des rumbs des vents; puis, si le vent le premier jour est au sud, on l'indiquera par un point au 180e degré; on en fera autant pour chacun des jours suivans, en passant de la droite NN aux droites $a'b'$, $a''b''$ qui lui sont parallèles. En unissant alors tous ces points par une ligne, on aura une courbe qui figurera les variations des vents. En ayant ainsi un grand nombre de courbes pour des observations faites de proche en proche sur une grande étendue de pays, on pourra prendre une idée très-exacte de la direction la plus commune des vents à la surface du globe.

État de l'Atmosphère.

MOIS.	PLUIES tranq.	ONDÉES.	AVERSES.	PLUIES d'orage.	BROUIL.	HYGROMÈTRE moyenne.
Janvier 31	6	4	0	0	5	65°,50
Février..... 28	7	8	0	1	4	71
Mars........ 31	7	6	0	2	4	59,50
Avril....... 30	6	6	1	2	3	54
Mai......... 31	7	5	1	2	3	48,40
Juin........ 30	4	2	2	3	2	44
Juillet...... 31	3	1	3	4	2	40,75
Août........ 31	5	0	2	4	2	38
Septembre 30	5	1	1	2	2	31,25
Octobre.... 31	7	6	0	1	4	41
Novembre 30	6	5	0	1	4	54,60
Décembre 31	6	4	0	0	5	63,75
TOTAL.... 365	69	48	10	22	40	611,75
Moyenne 30,4	5,8	4	0,8	1,8	3,3	50,98

M. *Kickx* compte qu'année commune, on a 17 jours de neige et 11 jours de grêle : on voit de plus par le tableau précédent, qu'il pleut généralement pendant 149 jours de l'année. Dans les mois d'hiver, les brouillards durent quelquefois des journées entières; pendant l'été, ils paraissent le plus souvent avec le crépuscule ou vers l'aube du jour et se dissipent avec le lever du soleil. On peut supposer que l'hygromètre de *Deluc*, dont se sert M. *Kickx*, n'a peut-être pas

toute la précision qu'on pourrait exiger et qu'il se tient généralement trop bas.

Les observations sur la température, ont été faites au moyen d'un thermomètre de *Deluc*, placé à l'ombre, en plein air, et au nord : elles ont été repétées quatre fois par jour et continuées pendant une longue suite d'années. Les hauteurs moyennes du baromètre sont calculées aussi d'après 22 ans d'observations, à environ 26 mètres au-dessus du niveau ordinaire du canal de Bruxelles.

MOIS.	ÉTAT DU THERMOMÈTRE.		ÉTAT DU BAROMÈTRE.	
	MAX. MOY.	MINIM. MOY.	MAX. MOY.	MIN. MOY.
Janvier... 31	1,5	0,5	28^{p} 0^{l}	27^{p} 9^{l}
Février... 28	3,5	2	27 11	27 8
Mars....... 31	7,7	4,7	27 11,7	27 9
Avril....... 30	9,5	7	28 0,2	27 10
Mai......... 31	14	9,5	28 0,5	27 10
Juin........ 30	16,25	12,2	28 1	27 10,3
Juillet.... 31	18,3	14,7	28 0,7	27 9,25
Août....... 31	16,5	12,5	28 0,7	27 9
Septemb. 30	13,7	8,3	28 0,5	27 10
Octobre.. 31	10,8	6,3	27 11	27 8,7
Novembre 30	6,3	4,3	27 11,25	27 7,25
Décembre 31	3	1,5	27 11,7	27 8,3
TOTAL.... 265	121,05	83,5	336 0,25	333 0,80
Moyenne 30,4	10,09	6,9	28 0,02	27 9,07

La température moyenne, dans toute l'étendue de l'année, est donc de 8°, 5 environ, ou 10°, 6 centigrade, comme à Paris et à Bude. Les chaleurs les plus fortes que l'on ait éprouvées à Bruxelles, ont eu lieu le 23 juillet 1778 et le 5 août 1801 ; le thermomètre s'est élevé jusqu'à 27 degrés. En 1788, le thermomètre a descendu jusqu'à 18 degrés au-dessous de zéro.

La hauteur moyenne du baromètre, est de 27 pouces 10,54 lignes ; et au niveau des moyennes eaux du canal de Bruxelles, de 28 pouces.

M. *Kickx* dit ne pas avoir observé la variation diurne du baromètre; cela peut tenir au peu de sensibilité de son instrument, insuffisant pour rendre appréciable une quantité aussi petite. En général, les observations faites par ce physicien, que nous ne pouvons faire connaître ici que sommairement, offrent un grand intérêt, parce qu'elles paraissent avoir été suivies avec soin et assiduité. De pareils matériaux manquent pour nos provinces; il serait à désirer qu'on s'occupât d'en recueillir davantage et qu'on songeât à leur donner toute la précision des observations astronomiques, comme cela se pratique actuellement dans tous les observatoires.

A. Q.

MÉTÉOROLOGIE.

Étoiles filantes.

J'ai indiqué dans le premier vol. de la *Correspondance mathématique*, page 73, quelques constructions graphiques pour déterminer, d'après deux observations faites dans des lieux différens, la hauteur à laquelle on a aperçu un météore. J'invitois en même temps les personnes qui prennent quelqu'intérêt aux observations météorologiques, à tourner leur attention vers les *étoiles filantes*, dans l'espoir d'acquérir quelques notions plus certaines sur la nature de ces phénomènes qui ne paraissent pas avoir été observés encore avec toute l'attention qu'ils méritent. J'ai engagé depuis plus particulièrement quelques-uns de mes anciens élèves à me seconder dans mes recherches; mais malheureusement le mauvais temps presque continuel qui a régné pendant les soirées que nous avions fixées pour les observations, m'a privé des secours que j'avais lieu d'attendre de leur complaisance et de leur zèle pour l'avancement des sciences. Par là, le peu d'observations que j'ai pu réunir sont demeurées sans utilité.

Lorsque je faisais cet appel aux amis des sciences, j'ignorais que M. *Brandes*, professeur à Breslau, venait d'en faire un à-peu-près semblable dans les Annales de physique de *Gilbert* (voyez an. 1823, cah. 3, 9, 10 et 12) : mais ce savant ne paraît pas avoir été plus heureux. Il avait promis de publier les recherches qui lui auraient été adressées; jusqu'à présent, il n'a paru, à ma connaissance, que les observations de M. *Lohrmann*. M. *Brandes* lui-même n'a point fait connaître ses résultats; il s'est contenté d'annoncer qu'il n'avait point été secondé, comme il avait eu lieu de l'espérer, et que d'après les observations peu concordantes qui lui étaient parvenues, il paraissait que les étoiles filantes qu'on aperçoit dans un lieu, ne sont guère visibles à la distance de 10 à 20 milles.

On voit d'après cela que la question demeure, à-peu-près, la même qu'elle était d'abord. Il serait donc à désirer qu'on y revînt dans l'intérêt même de la science. Toutes les branches de la Physique et de l'Astronomie, ont été explorées depuis quelque temps avec le plus grand soin; l'observation des étoiles filantes seule a été à-peu-près négligée. On peut donc dire que ce genre de recherches, indépendamment de l'avantage de ne point exiger d'instrumens astronomiques, a celui de la nouveauté (*).

On trouve aussi dans les Annales de *Gilbert*, des formules du professeur *Mollweide*, de Leipsig, pour le calcul de la hauteur des météores : peut-être pourraient-elles être présentées sous une forme plus simple (1823 cah. 10). J'ai songé depuis qu'il y aurait peut-être aussi quelqu'inconvénient à se contenter d'observer le météore dans un seul point de son cours : il arrivera effectivement que les deux rayons visuels menés vers ce point, des deux lieux d'observation, ne se trouveront presque jamais dans un même plan. Je pense donc qu'il serait préférable de regarder la trajectoire de l'étoile filante, comme l'intersection de deux plans passant par les deux lieux d'observation et par les arcs que cette étoile a décrits dans le ciel par sa marche apparente. On a tous les élémens nécessaires pour déterminer ces plans et conséquemment pour résoudre le problême. Comme les calculs sont

(*) J'ai appris par M. *Van Breda*, proff. à l'Univ. de Gand, que M. *Wollaston* s'est occupé des étoiles filantes; mais ce célèbre physicien ne paraît point avoir publié ses recherches. A. Q.

généralement assez longs, on peut prendre une première approximation qui fera connaître si les observations ne sont pas trop discordantes. Il suffit, en effet, d'avoir une sphère céleste à laquelle on donnera, par rapport à l'horizon, la position qu'avait le ciel à l'instant de l'observation. On étendra ensuite deux fils sur les arcs que l'étoile a parcourus par son mouvement apparent, aux yeux des deux observateurs, et ces fils prolongés détermineront deux grands cercles qui se couperont selon la droite qu'a parcourue le météore (*). On connaîtra ainsi approximativement la position de cette droite par rapport à l'horizon. Si au lieu de deux observations, on en avait trois, ce mode d'essai deviendrait beaucoup plus sûr. Je me réserve de revenir sur une appréciation mathématique de ces phénomènes, si, comme j'ai lieu de l'espérer, je me trouve secondé dans les nouveaux essais que je me propose de faire.

Il est à regretter que M. *Brandes* n'ait pas indiqué la marche uniforme que l'on avait à suivre. Je proposerai donc avec défiance celle que j'ai adoptée : elle m'a paru la plus expéditive. Après avoir réglé ma montre aussi bien que je pouvois espérer le faire dans une ville dépourvue d'instrumens astronomiques et même de bons cadrans solaires, j'ai placé près de moi dans un lieu bien découvert, une carte un peu détaillée du ciel avec un papier convenablement préparé, où devaient être consignées les observations par numéro d'ordre. Quand une étoile filante venait à paraître, je marquais légèrement sur la carte par un trait de crayon sa marche et le sens de sa direction. J'y plaçais en même temps un numéro qui servait de renvoi à la table où je notais exactement le temps, en indiquant ce que le météore pouvait avoir de remarquable. Il serait bon aussi, comme l'a fait M. *Lohrmann*, de marquer la durée de l'apparition qui est ordinairement de une à trois secondes. Ces indications rapides, avec un peu d'habitude, permettent en quelques minutes de faire plusieurs observations, et l'on conçoit qu'il est important de ne point perdre de temps; car la manière dont les étoiles filantes se sont succédées, peut offrir de nouveaux renseignemens. Il convient encore d'indiquer, pour le soir de l'observation, l'état du ciel avec lequel l'apparition de ces météores semble avoir des rapports.

(*) Nous supposons ici, pour plus de simplicité, que la trajection des étoiles filantes, est une ligne droite.



Voici un modèle de la table qu'on aurait à remplir : je le prends dans les Annales de *Gilbert :*

Etoiles filantes.

EPOQUES.	NUM.	GRAND.	DURÉE.	TEMPS MOYEN.	OBSERVAT.
Août... 29 (*)	1	1	3″	8h50′47″	
	2	3	2″	9 13 48	
	3	6	2″	35 33	
	4	2	3″	40 11	
	5	4	2″	57 9	

Le soir même ou le lendemain, par les indications de la carte, on aura soin de faire une seconde table où se trouveront indiqués les points extrêmes des arcs parcourus; il sera bon de déterminer approximativement leur déclinaison et leur ascension droite ainsi que le sens du mouvement apparent.

J'invite de nouveau les personnes qui voudront bien me seconder dans ces recherches sur les étoiles filantes, à prendre de préférence, pour les observations, les jours et les heures que j'indiquerai ci-dessous. J'aurai soin de publier les observations que l'on m'aura communiquées avec tout l'empressement que l'on doit mettre à faire connaître des recherches utiles. J'ai lieu d'espérer que mon appel sera entendu par les amis des sciences, et particulièrement par les jeunes savans qui, dans nos Universités, s'occupent avec zèle des recherches qui peuvent tourner au profit des connaissances physiques.

Indication des époques pour les observations.

Juin. Le 2, vendredi; le 5, lundi; le 30, vendredi.
Juillet. Le 3, lundi; le 7, vendredi; le 28, vendredi; le 31, lundi.
Août. Le 4, vendredi.

Les observations commenceraient à 9 heures du soir et finiraient à 10 et demi. A. Q.

(*) Ciel pur et très-calme.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Annales de l'Université de Leyden (*).

Années 1815 — 1816 — 1817.

Les Annales de cette Université datent de 1815 — 1816. Le premier volume de cette intéressante collection, renferme les trois positions suivantes.

1.° *E physica. Quænam præcipue phenomena in rerum natura VIRIBUS INERTIÆ, omni corpori propriis, sive solis, sive cum vi GRAVITATIS conjunctis, tribuenda sunt?*

2.° *E mathesi. Si singula corpora solida, Tetraëdrum, Hexaëdrum, vel cubus, Octaëdrum, Dodecaëdrum, Icosaëdrum, inscribantur sphæræ cujus radius æqualis sit unitati, quæritur cubus cujus capacitas æquatur capacitati illorum quinque corporum simul sumtorum?*

3.° *Ex astronomia. Quibus formulis construuntur horologia solaria supra plana Tetraëdri, Hexaëdri vel cubi et Dodecaëdri? sive qua formula construitur horologium solarium supra planum quodlibet datum?*

On n'a pas répondu à la première question.

Les réponses aux deux dernières questions, sont consignées dans les Annales 1816 — 1817. Le prix sur la question mathématique, a été partagé entre MM. *Rein. Car. Van Tuil Van Serooskerken,*

(*) Nous rappellerons aux lecteurs étrangers à nos Universités, qu'on n'insère dans les Annales, que les pièces couronnées.

candidat en droit et en philosophie à l'Université d'Utrecht, et *Did. Bax*, candidat en théologie à l'Université de Leyden. Cette question se réduisait à assigner la capacité de chacun des cinq corps et à extraire la racine cubique de la somme, laquelle est le côté du cube cherché. C'est, en effet, la marche suivie dans ces deux pièces.

La réponse à la troisième question, est de M. *Seerp. Brouwer*, docteur en médecine et accouchements, et candidat en math. et en phil. naturelle à l'Université de Leyden. Comme ces sortes de questions se reproduisent assez souvent dans cette collection, leur analyse nous exposerait à des redites continuelles : d'ailleurs nous nous sommes déjà expliqués à cet égard (*Corresp.* I.er vol., pag. 91 et suiv.), à l'occasion de la question d'astronomie proposée pour le concours de 1823-1824.

Années 1817 — 1818.

Les questions proposées, sont

1.° *E physica. Quœnam experimenta ope machinœ a doctissimo Atwood inventœ institui possunt, et quibusnam positionibus Physicis illustrandis inserviunt?*

2.° *E mathesi. Quœruntur tres pyramides œquales atque similes, unum regulare constituentes corpus, cujus capacitas œquatur telluris segmento quod acquireretur, si planum secans transiret per Leydam, Promontorium (Cap) Comorin et Canton?*

3.° *Ex astronomia. Si supra singula Tetraëdri, Hexaëdri et Dodecaëdri plana stylus erigatur perpendiculariter, quœritur formula cujus ope determinari possint puncta vel curvœ quas umbra a styli vertiœ projecta describit, sole ab uno ad alterum signum transeunte. Latitudo loci* 52° 9′ 26″.

Sur la Théorie de la machine d'*Atwood* (*), deux mémoires ont été couronnés : l'un est de M. *Laur. Jac. F. Knappert*, candidat en médecine à l'Université de Leyden; l'autre est de M. *Lion. Salom. van Praag*, candidat en mathématiques et en philosophie naturelle, et étudiant en médecine à la même Université. Chacun de ces mé-

(*) *Atwood* (*Georges*), physicien anglais, né vers 1745, étudia à l'Université de Westminster et au Collége de la Trinité de Cambridge, où il fut ensuite professeur. Le célèbre *Pitt*, ayant assisté à un de ses cours de physique, conçut



moires se divise en deux parties dont l'une comprend la description de la machine, et l'autre sa théorie qui consiste dans les lois de la chute des corps graves. Le second offre un dessin détaillé de la machine.

La réponse à la seconde question, est de M. *Abrah. Moolenaar*, étudiant en théologie, et candidat en philosophie théor. et lettres, à l'Université de Leyden. Comme nous avons déjà émis dans les Annales belgiques, notre opinion sur cette pièce comparée à deux autres réponses à la même question, nous nous dispenserons de revenir de nouveau sur ce sujet.

Sur la troisième question, la médaille a été adjugée à M. *Fréd. Bax*, candidat en lettres et étudiant en théologie à l'Université de Leyden. Ce mémoire est accompagné de dix planches. Nous ne laisserons pas échapper cette double occasion de féliciter MM. les élèves en Théologie des Universités septentrionales, de l'heureuse alliance qu'ils font de leurs études spéciales avec la culture des sciences. Nous avons aussi l'espoir fondé que les jeunes gens qui, dans nos provinces, se destinent à la carrière du sacerdoce, auront acquis sur les sciences physiques, naturelles et mathématiques quelques connaissances préparatoires à une étude plus approfondie à laquelle ils pourront consacrer plus tard les loisirs que leur laisseront les fonctions du ministère.

Années 1818 — 1819.

Les questions proposées, sont

1.° *E physica. Quæritur descriptio historiæ inventionis Penduli Compensatorii, ut et expositio ejusdem Penduli Theoriæ in universum spectatæ.*

2.° *E mathesi. Si sphæra cujus radius æquat unitatem, dividatur*

---

une si grande idée de ses talens, qu'il l'employa dans le ministère des finances : ce ministre lui fit obtenir une pension qui s'éteignit à sa mort, arrivée en 1806, un an avant celle d'*Atwood*. Les ouvrages de ce savant, écrits en Anglais, sont : 1.° *Traité sur le mouvement rectiligne et la rotation des corps, avec une description d'expériences relatives à ce sujet*, 1784. 2.° *Analyse d'un cours sur les principes de la physique, fait à l'Université de Cambridge*, in-8.° 1784. 3.° *Recherches fondées sur la Théorie du mouvement, pour déterminer les temps des vibrations des balanciers des horloges* (*Trans. phil.*) analysées dans la *Biblioth. brit.* de Genève, tom. II des sciences et arts. B-r-J.

in tres partes concentricas, in sphæram igitur et duos annulos sphæricos, omnes partes ejusdem capacitatis; quæritur punctum e quo tres harum sphærarum diametri, in linea horizontali positæ, conspiciuntur sub æquali magnitudine apparenti, et hinc methodus figuras ad speculi cylindrici atque conici usum delineandi.

3.° *Ex astronomia. Quæritur descriptio instrumenti Æquatorialis, atque explicatio usus in quem adhiberi solet.*

La réponse à la question physique, est de M. *J. G. Ermerins*, étudiant en médecine et candidat en mathématiques et en philosophie naturelle à l'Université de Leyden. Avant d'en venir au pendule de compensation, l'auteur définit le pendule en général : il parle des tentatives faites par *Galilée* pour l'appliquer à la mesure du temps, et de celles plus heureuses du célèbre *Huyghens* : on crut alors, dit-il, avoir obtenu une mesure exacte du temps; mais en 1669, le mécanicien *Picard* reconnut que les horloges à pendule, avançaient en hiver et retardaient en été : tel était le vice qu'il fallait faire disparaître, et qui le fut par l'invention des *compensateurs* ou *pendules invariables*. Le premier inventeur fut *G. Graham*, physicien et artiste de Londres, qui composa sur ce sujet un écrit communiqué en 1726 à la Société royale de cette ville. L'auteur décrit les perfectionnemens dus à *Harrison*, *Frotheringham*, *Julien Leroy*, *Joh. Ellicot*, *Cassini*, *Berthoud*, *Rivaz*, *Grenier* et *Seyffert* : il s'arrête particulièrement sur l'invention de ce dernier, perfectionnée par un certain géomètre *Van Sina*. Deux planches exécutées avec soin, offrent tous les détails nécessaires à l'intelligence des descriptions.

La médaille sur la question mathématique, a été accordée à M. *J. G. Van den Bergh*, étudiant en médecine et candidat en mathématiques et en philosophie naturelle à l'Université de Leyden. L'auteur détermine d'abord les diamètres de trois sphères dont les capacités sont comme $3 : 2 : 1$, ou comme $1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$, et il trouve que ces diamètres sont $a = 2$, $b = 1,74716$, $d = 1,386722$. Pour satisfaire à la seconde partie de l'énoncé, il cherche à déterminer une position de l'œil O telle que ces droites a, b, c soient vues sous la même grandeur apparente, ou, en d'autres termes, telle que les angles à l'œil, entre ces droites, soient égaux. Il prouve d'abord que ces trois droites ne peuvent être étendues bout à bout sur une même horizontale et que, sous la condition d'être placées sur une même droite, elles doivent être séparées ou discontiguës : il démontre ensuite qu'on

*

peut les prendre de telle manière qu'à la vérité elles ne soient plus sur une même horizontale, mais qu'elles soient parallèles entre elles, dans un même plan horizontal. Cette seconde partie donne lieu à une discussion assez étendue et qui n'est pas sans intérêt. Passant enfin à la troisième et dernière partie de l'énoncé, il montre comment par la réflexion de miroirs métalliques cylindriques et coniques, on produit des figures dont toutes les parties sont vues sous les mêmes angles, ou sous les mêmes grandeurs apparentes que celles d'une figure donnée. Il cite la machine *Anamorphotique* de *Jac. Leopold*, Act. Erud. Lips. ann. 1712, pag. 273 et 367; *les nouvelles Récréations Phy. et Math. de Guyot*, et le livre de la *Magie universelle* de *Gasp. Schott*.

La réponse à la troisième question, est de M. *Benj. Kam*, candidat en lettres et étudiant en théologie à l'Université de Leyden. L'auteur, dans son introduction, donne une histoire succincte de l'astronomie et particulièrement l'énumération des instrumens employés aux observations : il la termine ainsi : « Verum inter instrumenta astronomica, primum locum tenere videtur instrumentum AEquatoriale quod, ut infra videbimus, loco multorum aliorum instrumentorum adhiberi solet; dum varia problemata quibus solvendis varia instrumenta requiruntur, ope ejus solvuntur. »

Nous sommes forcés par la nature même du sujet, de nous borner à l'indication des sections dans lesquelles l'auteur a divisé son mémoire; elles sont au nombre de deux qui ont pour titre : 1.° *Descriptio instrumenti Æquatorialis;* et 2.° *Explicatio hujus instrumenti.* Cette description est accompagnée de trois planches qui offrent sur une grande échelle, tous les détails de l'instrument.

Années 1819 — 1820.

Les questions proposées sont :

1.° *E physica. Ponitur vas cavum ex materia densiori quam aqua confectum, a latere foramine instructum, aqua penitus impletum, eidemque prorsus immersum : hujus igitur vasis parietes interni quœritur utrum* ALIAM *pressionem patiantur, si foramen sit* CLAUSUM? ALIAM *si sit* APERTUM? *postulatur ut responsio sit legibus hydrostaticis innixa, quœ simul exhibeat rationes, modos et discrimina quibus lis inter doctos sœpius agitata penitus dirimi possit, an* FLUIDA GRAVITENT IN PROPRIIS LOCIS.

2.° *E mathesi. Si Telluris sphæra intelligatur inclusa Dodecaëdro, et unus angulus plani in cujus centro est observatorium Leidense, se dirigat versus meridiem, quærantur longitudines, latitudines, anni tempestates locorum quæ sint in reliquis planis, uti et puncta per quæ axis Telluris transiturus esset?*

3.° *Ex astronomia. Ad diem* 1 *novembris* 1825 *computentur anguli horarii, altitudines, azimutha stellæ α et ζ Polaris, dum sint in eodem verticali, uti et cum pervenerint ad æquales altitudines. Latitudo observatorii Leidensis* $=52^\circ\ 9'\ 26'',5$, *et longitudo orientalis a Parisiorum meridiano* $=2^\circ\ 9'=0^h\ 8'\ 36''$.

Le prix sur la première question a été décerné à M. *Pet. Joan. Uylenbroek*, candidat en mathématiques et en philosophie naturelle à l'Université de Leyden. Dans un *Præmonenda*, l'auteur commente la question en ces termes : « Patet enim præcipue hic quæri de æquali vel inæquali pressione in parietes internos vasis aqua impleti et aqua circumdati, prout foramen sit clausum vel apertum : simul vero requiritur ut lis de gravitatione fluidorum in propriis locis dirimatur. Et sane cum omnes leges hydrostatices in una quasi lege generaliori, in ipsa fluidi natura, sint fundatæ, atque lis illa dirimi nequeat, nisi ad primas fluidi proprietates adscindamus, manifestum est quæstionem de pressione interna fluidi in parietes vasorum, egregiam præbere ansam quædam de ea lite disserendi, eamque, dummodo ejus examen legitime fuerit institutum, dirimendi. Hoc autem magis etiam patebit, ubi in animum revocabimus pressionem nullum habere locum, quando gravitas tollitur, atque hinc, gravitatione fluidi in loco suo negata, negari ejusdem in eodem loco pressionem. » Cette dissertation est divisée en trois chapitres; la conclusion qui termine le premier chapitre, est ainsi conçue : *Parietes interni vasis ex materia densiori quam aqua confecti, a latere foramine instructi, aqua penitus impleti, eidemque prorsus immersi, semper, sive foramen illud sit clausum, sive sit apertum, eandem experiuntur pressionem* (*). Nous essayerons de donner une idée du contenu des deux chapitres suivans qui ont pour titre : 1.° *Variæ virorum doctorum sententiæ de gravitate fluidorum in propriis locis, ut et argumenta*

(*) Dans le second cas, on sait qu'un vase très-mobile, qui n'éprouverait aucune pression extérieure, aurait un mouvement contraire à celui du jet.

et experimenta quibus suam quisque sententiam firmare conatus est. 2.° *Rationes, modi et discrimina quibus lis de gravitatione fluidorum in propriis locis, penitus dirimi possit. Aristote* croyait que l'air et l'eau gravitent dans les fluides homogènes : *Archimède, Ptolomée, Simplicius* et autres philosophes de l'antiquité ne partagèrent point cette opinion : suivant eux, aucun élément ne gravite dans sa place naturelle, pourvu que le plus pesant soit au-dessous. Parmi les commentateurs d'*Aristote,* ceux nommés : *Socii Conimbricenses* réfutèrent ses argumens. Le père *Schott,* dans sa Magie universelle, apporte ces preuves que l'eau ne gravite pas dans l'eau. 1.° Les crins de chevaux que l'on regarde comme ayant le même poids que l'eau, conservent dans ce fluide la place qu'on leur fait occuper : 2.° Les parties de l'eau seraient dans un mouvement continuel. Il réfute les expériences d'*Emmauuel Magnan.* A *Schott* succèda *Robert Boyle* qui, dans ses paradoxes hydrostatiques, attaqua l'opinion de *Schott* et établit l'opinion contraire de telle manière que, pendant long-temps, on ne révoqua plus en doute que *les fluides gravitent dans les fluides* : il pose en principe que *dans l'eau et dans les autres fluides, les couches inférieures sont comprimées par les supérieures* : nous ne relaterons pas l'expérience sur laquelle il fonde ce principe, parce qu'elle ne se rapporte pas immédiatement à la question; mais nous décrirons celle par laquelle il réfute les argumens de *Schott* et, dit l'auteur « conatus fuit determinare quantum gravitet aqua in aqua ». Cette expérience *de Boyle* consiste à prendre une bouteille de verre de la grandeur d'un œuf et terminée à l'une des extrémités par un tube recourbé : on chauffe la bouteille pour raréfier l'air qu'elle renferme, et après avoir fermé hermétiquement le tube, on la fait descendre sous l'eau au moyen d'un poids; ensuite on suspend le tout au bassin d'une balance et on fait équilibre au moyen de poids que l'on met dans l'autre bassin. L'appareil étant ainsi disposé, on brise au moyen d'une pince l'extrémité du tube, l'eau entre dans la bouteille qui descend, et pour rétablir l'équilibre, on est obligé d'ajouter au poids qui se trouve dans l'autre bassin; *Boyle* a trouvé que ce poids est, à très-peu-près, celui de l'eau entrée dans la bouteille. « Unde liquet non modo aquam gravitare sub aqua, sed eam vel fere, vel plane tantum inibi ponderare ac ipsa illa portio liquoris ponderaret in aere » *Sgravesande, Musschenbroeck, Nollet* et d'autres furent convaincus que l'eau gravite dans l'eau. Mais *Hessling* prétendit que l'expé-

rience de *Boyle* ne prouvait pas ce que ce physicien avait voulu prouver. Telle est, à beaucoup de détails près, la substance du second chapitre. Dans le troisième, l'auteur prétend avec raison que toute cette querelle n'était qu'une dispute de mots, et qu'on ne s'accordait pas sur l'acception des locutions : *gravitare, gravitare in propriis locis,* etc. « Ex his omnibus itaque apparet, in examinanda lite de gravitatione fluidorum in propriis locis, bene esse attendendum ad mentem litigantium, scilicet quemnam sequentum trium casuum intellexerint : 1.° gravitatem fluidi in fluido; 2.° pondus fluidi in fluido, sive pondus absolutum; 3.° pondus fluidi in bilance, sive pondus relativum ». Enfin et pour en finir, nous passerons à la conclusion de l'auteur : « Concludimus igitur et contendimus experimentum *Boyleanum* probare quod ejus ope probare sibi proposuerat eximius *Boyleus;* illudque præclarum exhibere quod tam egregie et accurate enunciavit ipse *Boyleus, artificium æstumandi gravitatem aquæ in aqua, vulgarium bilancium et ponderum adminiculo.* »

La réponse à la question mathématique, est de M. *H. A. Ermerins,* étudiant en droit à l'Université de Leyden. Puisqu'il est question d'une sphère inscrite à un dodécaèdre, il aurait été nécessaire, pour fixer les idées, de commencer par rappeler ou par observer que la sphère touche les faces pentagonales du dodécaèdre au centre même de chacune de ces faces, c'est-à-dire, dans un point de la droite qui joint un de ses angles avec le milieu du côté opposé, droite qui est une tangente à la sphère. Et alors on aurait très-bien compris que le plan qui divise également la sphère et le dodécaèdre, doit passer par deux arrêtes opposées et parallèles, et que, sous cette condition qui en détermine déjà la position, ses intersections dans les faces qu'il coupe, sont des tangentes au cercle suivant lequel ce même plan coupe la sphère. Telle est, en effet, l'explication de la figure qu'emploie l'auteur, et qui leve toute difficulté. M. *Ermerins* traite d'abord la troisième question, puis la seconde, puis la première; comme ses solutions sont tirées des formules de la trigonométrie sphérique, nous nous dispenserons d'entrer dans plus de détails sur ce mémoire qui d'ailleurs résout la question, comme on peut le désirer.

La réponse à la question d'astronomie, a pour auteur M. *Jan Guill. Van Den Bergh,* candidat en mathématiques, en philosophie naturelle

et en médecine à l'Université de Leyden, déjà cité année 1818–1819. Dans ce mémoire qui n'est encore qu'une suite d'applications des formules de la trigonométrie sphérique, le dispositif des calculs est bien entendu, et cette remarque s'applique à toutes les réponses aux questions d'astronomie.

Années 1820 — 1821.

Les questions proposées sont

1.° *E mathesi. Explicetur methodus interpolandi et uno alterove exemplo illustretur.*

2.° *Ex astronomia. Quænam est Micrometrorum in tubis Astronomicis Theoria? quinam eorum usus?*

Les réponses à ces deux questions, sont de M. *P. Joh. Uylenbroek*, auteur de la dissertation sur la question de physique dont nous avons rendu compte sous l'année 1819 — 1820.

L'intérêt que présente la question mathématique, nous fait un devoir de l'analyser avec quelqu'étendue.

Dans son introduction, l'auteur dit que la question de l'*insertion des moyens*, n'est pas restreinte aux séries dites : arithmétiques et géométriques ; mais qu'elle s'étend aux séries arithmétiques de tous les ordres, c'est-à-dire aux séries à différences 2.mes, 3.mes, etc. constantes et qui sont dites des 1.rs, 2.mes, etc. ordres.

Le chapitre 1.er a pour titre : *Theoria interpolationis* : il se divise en cinq paragraphes : dans le premier, l'auteur se reporte à *Gabriel Mouton* (prêtre et chanoine de Lyon, mort en 1694) qui n'a étendu l'interpolation que jusqu'aux séries du 4.me ordre : « Cum enim series altioris quam quarti ordinis interpolare vellet, spes eum fefellit : consilium igitur suum communicavit cum amico *Francisco Regnaud* qui non diu cunctatus propositionis solutionem aggressus est, et quod suscepit accurate implevit ». L'auteur fait connaître la solution de ce géomètre, et la forme analytique que lui a donnée *La Lande*, en se bornant cependant aux séries du troisième ordre. Le second paragraphe a pour titre : *Ejusdem problematis solutio Newtoniana, quam multi dein viri docti secuti sunt. Ex formula Newtoniana, illæ Meyeri, Florini, La Landii, Gardineri deducuntur. Methodi a Lagrangio et Burkhardio propositæ, quibus hujus formulæ usus facilior ac brevior fiat, exhibentur.* Après avoir cité les ouvrages de *Newton*, de *Stirling*, de *Cotes*, de

Walmesley, de *Lacroix* et d'*Euler*, dans lesquels ces géomètres traitent le sujet en question, M. *Uylenbroek* expose la méthode de *Newton* dans les deux cas où les abscisses de la courbe parabolique, sont équidistantes ou non, lesquels donnent lieu à deux formules. Mais *Newton* n'a considéré qu'une série d'ordonnées allant à l'infini d'un seul côté : « Stirlingius autem duas alias series sibi proponit in quarum altera una ordinata ceteris est intermedia, in altera duæ sunt intermediæ ». Après avoir démontré les deux formules de *Stirling*, il revient à l'une des formules de *Newton*, qu'il transforme dans celle de *F. C. Maier*. On trouve à la suite celles de *Floryn* (*), de *Gardiner* et de *La Lande*, la formule connue de *Lagrange* (séan. des Ecol. Norm., tom. IV), démontrée quelques années auparavant par *Ed. Waring*, et enfin la méthode de *Burckhard* (Connaiss. des temps pour l'an 15 de l'Ere française). Le paragraphe III est intitulé : *Expositio methodi celeb. Lagrange*. « Aliam, inquit auctor, ingressus est viam celeb. *Lagrange*, ut ejusdem problematis generalem daret solutionem. Cum enim methodus interpolandi *Moutoniana* ipsi videretur *Newtoniana* præstantior, quippe quæ simplici additione absolvatur, ideoque in praxi multo sit commodior, operæ pretium duxit talem quærere problematis solutionem quæ cum maxima generalitate summam in praxi facilitatem conjunctam haberet. Hanc autem invenit et exposuit in commentatione inserta in *Mem. de l'Acad. de Berlin, Année* 1792. Nos de ea tantum referemus quantum nostro consilio satisfacere videtur ». En conséquence, il établit d'après cet illustre géomètre, les deux formules qui contiennent la solution générale du problème. Le IV.e paragraphe qui a pour titre : *Problematis de interpolatione solutio ops calculi differentiarum*, offre la formule d'interpolation de M. *Prony*, qu'on trouve dans *ses Leçons d'analyse, Journ. de l'Ecole polyt. cah. IV, pag.* 551 *et suiv.* Le cinquième paragraphe, *Insignis calculi differentialis usus in Tabulis quibusvis interpolandis*, porte sur l'interpolation des logarithmes et des quantités trigonométriques. L'auteur a dit sur ce point tout ce qu'il pouvait dire : il ne pouvait avoir connaissance des moyens employés par le bureau du Cadastre de France, pour calculer : 1.° une table de sinus naturels avec 22 décimales exactes, pour chaque dix-millième du quart de cercle, et

(*) *Inter opera primæ classis instituti Regii Belgici.*

cinq ordres de différences; 2.° une table offrant les tangentes naturelles, avec pareil nombre de décimales, de centième en centième, et tous les ordres de différences nécessaires pour interpoler cent résultats : 3.° une table de logarithmes sinus et tangentes pour chaque cent-millième du quart de cercle, avec douze décimales et trois ordres de différences : 4.° les logarithmes rapports des arcs aux sinus et des tangentes aux arcs, pour les cinq premiers centièmes du quart de cercle, avec le même nombre de décimales et deux ordres de différences; 5.° une table des logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 200000 avec 12 décimales et trois ordres de différences : 6.° un recueil de tables astronomiques. Dans le rapport fait à l'Institut, MM. *Lagrange*, *Laplace* et *Delambre*, ont dit de ces tables qu'*elles sont le monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui ait jamais été exécuté ou même conçu* (*).

Le chapitre second qui a pour titre : *Theoria interpolationis exemplis illustrata*, est une application de toutes les formules données dans l'autre, à une même question astronomique dont l'objet est de déduire de quelques longitudes du soleil et de la lune, pour des époques connues, l'époque intermédiaire à laquelle elles seront égales, ou pour laquelle il y aura conjonction.

L'auteur termine cette excellente dissertation dont nous recommandons la lecture aux élèves suffisamment préparés, par cette opinion de *Lagrange* : *la méthode d'interpolation est, après les logarithmes, la découverte la plus utile qu'on ait faite dans le calcul.*

On nous permettra de ne pas nous arrêter sur la réponse à la question astronomique, qui est encore de M. *P. J. Uylenbroek*, non qu'elle soit dépourvue d'intérêt, ou qu'elle ne soit digne de son auteur et de la médaille qui lui a été adjugée, mais parce qu'il est difficile et, pour ainsi dire, impossible d'analyser une pièce qui n'offre, en grande

(*) Dans le chap. XIX de mon Analyse algébrique, vol. de 668 pag. publié à Paris, en 1814, j'ai donné les formules d'interpolation qui ont servi à calculer ces tables exécutées par une division de géomètres et de calculateurs formant la section géométrique du Cadastre, dont j'étais le chef, et qui comptait pour collaborateurs MM. *Legendre*, *Chompré*, traducteur de Cagnoli, *Lanz* et autres géomètres distingués. Le volumineux manuscrit de ces tables est resté long-temps entre les mains de M. *Prony*, directeur de cet ancien cadastre, et il est probable que l'impression n'en sera jamais continuée.

partie, que des citations et surtout des descriptions qu'on ne peut suivre qu'à l'aide de figures. Il nous semble d'ailleurs qu'en fait de questions, le champ de l'Astronomie ne laisse que l'embarras du choix.

Année 1821 — 1822.

Les questions proposées sont :

1.° *E physica mathesi. Exponatur Barometri ad objectorum altitudines déterminandas destinati, tum constructio, tum usus* (*).

2.° *E mathesi. Problema de quadratura curvarum explicetur et exemplis illustretur.*

L'auteur de la réponse à la première question, est M. *Guillaume Wenckebach*, Hagani, matheseos ac philosophiæ naturalis in Athenæo Daventriensi, studiosus.

Dans son introduction, l'auteur expose la marche qu'il se propose de suivre. Son mémoire est divisé en deux parties dont la 1.re a pour titre : *De constructione barometri*, et la seconde : *De usu barometri*. La première qui contient huit paragraphes, est résumée par l'auteur, dans onze conditions relatives aux baromètres tant siphoniformes qu'à niveau constant. La seconde partie est divisée en huit paragraphes qui sont 1.° *Expositio Theoriæ* : 2.° *de Historia formulæ* : 3.° *Correctiones formulæ addendæ* : 4.° *Contractio formulæ* : 5.° *Determinatio locorum altitudinum supra maris libellam* : 6.° *Determinatio spatii horizontalis* : 7.° *De loco, Tempore, Ratione observandi* : 8.° *De Tabulis Barometricis*. La partie historique est traitée avec soin. Dans la série des formules que donne l'auteur, nous n'avons pas trouvé celle de M. *Prony* (**). D'ailleurs sauf cette omission, quelques legères améliorations, et surtout cette observation qu'on doit toujours, dans le baromètre à une branche, compter la hauteur du mercure à partir du point le plus élevé de la convexité de la colonne, ce mémoire nous paraît répondre complètement à la question, et nous ne pouvons qu'en recommander la lecture aux étudians qui traiteront celle de Liége. L'auteur termine son travail par cette phra-

---

(*) Cette question a été proposée en d'autres termes et remise au concours par l'Université de Liége (tom. I.er de la Correspond. pag. 249).

(**) Voyez I.er vol. de la Corresp. pag. 93 et suiv.

se : « Et merito dixerit nostri sæculi *Newtonus*, magnus *Laplacius* : Si l'on considère toutes les causes qui troublent l'équilibre de l'atmosphère....., on ne sera point étonné de l'inconstance et de la variété de ses mouvemens qu'il sera très-difficile d'assujettir à des lois certaines (*Exp. du Syst. du Monde*, tom. II, pag. 163) ».

La réponse à la 2.de question, est de M. *Guill. Herm. Cost Jordens*, candidat en droit à l'Université de Leyden. En écartant quelques réflexions qui se présentent naturellement, mais qui pourraient paraître déplacées ici, nous nous bornerons à féliciter M. *Cost Jordens*, de ce qu'il ne regarde pas la culture des sciences exactes comme une aberration de la carrière qu'il parcourt. Nous avons eu occasion de citer ailleurs les noms de plusieurs hommes qui ont honoré en même temps la magistrature et les sciences. Dans son introduction, M. *Cost Jordens* fait l'analyse de sa pièces en ces termes : « Dividi illam (commentationem) in quinque capita quorum primum docet quid Veteres de Quadratura curvarum fecerint et excogitaverint ; continet illud tres §§ scilicet : I.m explicat quid sit Quadratura curvarum : II.m continet Quadraturam curvarum apud veteres Græcos, uti et quædam de lunulis Hippocratis : III.m breviter exhibet celeberrima Archimedis inventa circa Parabolam, Ellipsin et Circulum. Caput secundum agit de methodo indivisibilium Cavalerii. Tertium de celeberrima regula Guldini. Quartum explicat Problema, exemplis illustratum, secundum principia calculi differentialis et integralis. Distributum illud est in duas sectiones quarum prima agit de Quadratura curvarum, exemplis additis, pro ordinatis parallelis, iisque orthogonalibus : in ejus §, ipsum problema exposui : in §§ vero 2—9 exempla ad illud illustrandum proposui Parabolam, Circulum, Ellipsin, Hyperbolam, Cycloidem ejusque Sociam, Conchoidem, Cissoidem et lineam Logisticam sive Logarithmicam. Secunda explicat problema, additis exemplis, pro casu ubi curva referatur ad aliquem focum, ita ut coordinatæ sint radii vectores et anguli quos hi radii cum aliquo radio vectore, positione dato, comprehendunt. In ejus § 1 rursus explicui problema pro hoc casu; in sequentibus vero §§ 2—6 illud illustrare conatus sum exemplis Spiralium Archimedeæ, Logarithmicæ, Hyperbolicæ et Epicycloidum. § 7 autem quædam adjeci de sectoribus Circularibus, Ellipticis et Hyperbolicis. Quintum denique agit de Quadratura superficierum curvarum : subdivisum illud est in

sex §§ sic inscriptas : 1. Brevis historia hujus capitis : 2. Explicatio problematis : 3. De superficie sphærica : 4. De superficie paraboloidis : 5. De superficie sphæroidis : 6. Series pro zonis sphæroidicis ». Tous les ouvrages consultés par l'auteur, sont cités avec une scrupuleuse exactitude, ce qui forme une bibliographie précieuse dans cette partie de la science.

Années 1822 — 1823.

Ont été proposées les questions suivantes :

1.° *E physica. Quibusnam effectibus* TENSIO ELECTRICA, *quam vocant* (*Tension Electrique*) *et* FLUXUS ELECTRICUS (*Courant Electrique*), *conveniunt? Quibusnam differunt? Concinne et simul accurate, quoad ejus fieri potest, ex recentissimis physicorum cum observationibus, tum experimentis, hæc quæstio exponatur et illustretur.*

2.° *E mathesi. Problema trium axium explicetur, uno alterove exemplo illustretur.*

La réponse à la première question, est de M. *Boudewin Donker Curtius,* étudiant en droit à l'Université de Leyden, et pour qui l'étude des sciences est aussi une diversion à celle que lui impose sa carrière. Dans son introduction, l'auteur observe qu'il a compris, en lisant le dernier membre de la question, qu'on demandait une exposition de la belle et ingénieuse doctrine de M. *Ampère.* Il y définit la *tension électrique;* il motive la préférence qu'il donne aux dénominations : *électricité positive et négative* sur celles-ci : *électricité vitrée et résineuse,* et il termine par une exposition de la marche qu'il a suivie, et qui nous a paru très-propre à donner une idée nette de la manière dont il a traité son sujet : c'est pourquoi nous le copierons littéralement. « *Primum caput* agit de Apparatu Electro-Motrice in genere, ejusque effectibus chemicis et continet quinque §§ quarum 1. agit de inventione electricitatis Galvanicæ et pilæ voltaicæ : 2. continet descriptionem diversorum apparatuum Electromotricum. » Il y parle aussi des piles secondaires du docteur *Ritter* : « 3. diversos horum apparatuum agendi modos : 4. decompositionem aquæ : 5. reliquos effectus chemicos. *Secundum caput* agit de actione mutua duorum fluxuum Electricorum et subdividitur in septem §§ quarum in 1. agitur de experimentis quibus lex generalis actionis mutuæ duorum fluxuum Electricorum nititur : 2. de legibus attractionum

et repulsionum duorum fluxuum Electricorum in quacumque positione : 3. de conductoris sinuosi actione in conductorem rectilineum : 4. de compositione et décompositione portionum infinite parvarum fluxus electrici : 5. de expressione analytica actionis mutuæ duarum portionum infinite parvarum fluxus electrici : 6. de actione directrice alius fluxus in alium, et 7. de motu conductoris mobilis in motum deducti actione conductoris fixi. *Tertium caput* continet expositionem actionis telluris in conductorem mobilem. *Quartum caput* comprehendit expositionem actionis mutuæ fluxus electrici et magnetis, atque in sex dividitur §§ quarum 1. agit de experimentis *Cl. Oersted,* earumque explicatione : 2. de attractionibus et repulsionibus inter fluxum electricum et magnetem. 3. de motu magnetis a conductore in motum deducti et vicissim : 4. de effectibus magneticis qui, ope fluxus electrici, imitari possunt. 5. de magnetisatione chalybis aliusve metalli, ope fluxus electrici, et 6. de quibusdam effectibus magneticis ex theoria Amperiana explicatis. Denique *Quintum caput* continet effectus tensionis electricæ, eorumque comparationem cum similibus e fluxu ». Les noms et les travaux des créateurs et des promoteurs de cette branche de la science, sont cités avec scrupule. L'auteur ne pouvait alors avoir connaissance du *Manuel d'Electricité dynamique,* par *J. F. Demonferrand,* qui ne parut qu'en 1823, non plus que de l'*Exposition méthodique des Phénomènes Electro-Dynamiques et des Loix de ces phénomènes,* par M. *Ampère,* publiée sous la même date, et de la *Description d'un appareil Electro-Dynamique,* donnée par M. *Ampère,* en 1824 (*). Cette dissertation sera lue avec fruit par ceux qui voudront acquérir sur cette nouvelle doctrine, une instruction plus approfondie que celle qu'on puise dans les Traités ordinaires de Physique.

La seconde pièce est de M. *Jac. Nicol. Van Puttkammer,* candidat en mathématiques, en philosophie naturelle et en droit à l'Université de Leyden. Nous citerons d'abord les deux opinions par lesquelles il commence et termine son mémoire « 1.° In disciplinis mathematicis neminem credo diligentem operam posuisse, quin magnam ex eo studio utilitatem caperet. Hac enim sunt quibus, ut ait Plato, purgatur

(*) Voyez I.er vol. de la Corresp. Math. et Phys., pag. 276, une note de M. *Ampère,* et II.e vol. pag. 35, un mémoire du même Physicien.

et excitatur instrumentum quoddam animi, quod servari melius sit quam mille oculos : eo enim solo veritas cernitur. 2.° In geometria partem esse utilem teneris ætatibus agitari; namque animos atque acui ingenia et celeritatem percipiendi venire, vulgaris opinio est (*Quintilianus*) ». L'auteur aura probablement craint d'outre-passer les bornes d'un mémoire, en employant les nombreux matériaux qu'il avait sous la main, et qu'il pouvait exploiter avec choix et liberté, puisque l'énoncé de la question ne lui imposait aucune restriction à cet égard.

Années 1823 — 1824.

Les questions proposées sont :

1.° *E mathesi. Theoria de maximis et minimis explicetur et variis exemplis illustretur.*

2.° *Ex astronomia. Horologium solare inscribatur plano quod transit per α et ζ Orionis et Observatorium Leydense.*

Nous avons rendu compte dans le I.er vol. de la *Corresp.* pag. 23, et suiv., des deux réponses à la première question, dont l'une est de M. *P. F. Verhulst,* Docteur en sciences à l'Université de Gand, et l'autre de M. *G. J. Verdam,* Docteur en sciences à celle de Leyden; et nous avons analysé pag. 91 et suiv. la réponse à la seconde question, qui est encore de M. *B. Donker Curtius,* cité plus haut pag. 121.

Années 1824 — 1825.

Le volume de cette année, qui vient de paraître, ne contient que la réponse à la question d'astronomie, qui a pour énoncé :

Determinetur vis qua corpore e Luna sit projiciendum in Tellurem, ut et tempus quod impenderet illud corpus ad hanc viam absolvendam.

Elle est de M. *G. J. Verdam,* auteur de plusieurs mémoires couronnés et déjà analysés. Il établit d'abord quelques hypothèses « Quas, inquit, eo libentius arripimus, quoniam magnas difficultates levare ideoque ipsum problema nostris viribus magis adaptare videtur » : tel est le langage du talent modeste. Il expose en ces termes la marche qu'il vâ suivre « Determinatur vis qua corpus e Luna est projiciendum ut in Tellurem perveniat, si inveniatur velocitas qua corpus e Luna abit et in Tellurem venit; itaque aptum nobis visum est primum invenire generalem formulam, seu valorem velocitatis ex qualibet

vi motrice ortæ, et inde determinare *minimum* ipsius velocitatis, quâ corpus e Luna profectum, telluris superficiem potest attingere : hac autem vi determinata, temporis functionem e formulis inventis deducere conabimur. » Il cherche d'abord les composantes suivant trois axes rectangulaires menés par un point quelconque de la route du mobile, des forces accélératrices qui le sollicitent, et en les intégrant par les méthodes connues, il obtient les carrés des vitesses en un point quelconque de la trajectoire : ces trois formules renferment en somme trois constantes arbitraires que l'auteur détermine avec beaucoup de sagacité, d'après les circonstances initiales du mouvement. Cela fait, il calcule la force de projection et le temps écoulé, recherches qui font la matière de deux paragraphes. Pour parvenir à la première détermination, il tire des expressions des trois vitesses composantes qui sont $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ (*), celle de la vitesse résultante ou effective du corps projeté, puis il dit : « Cogitemus vim projicientem tantam ut corpus, ex reactione virium acceleratricium, tandem quiescat in quodam viæ puncto : perspicuum est, adhibita vi projiciente minoris intensionis, corpus nunquam posse attingere illud quietis punctum, sed extincta intensitate vis projectionis, ex reactione ipsius Lunæ, rursus versus Lunæ superficiem cadet : majori autem vi projiciente, corpus non modo attinget dictum punctum, sed illud etiam transgredietur, et nunc majori intensitate a Terra attractum, quam a Luna, Tellurem etiam petat opportet. Quod si talem invenire possumus vim projicientem, qua exstincta, ut ita dicam, corpus quiescit, statim habemus vim quæ satis valet ad corpus

(*) Pour l'intelligence de ces expressions et de la suite de l'analyse de cet intéressant mémoire, nous dirons que T et L représentant les centres de la terre et de la Lune, TLX l'orbite lunaire, conséquemment TL = R, le rayon vecteur de la Lune, supposé invariable, et C étant une position quelconque du corps projeté ou lancé de la Lune, position intermédiaire entre la Terre et la Lune, il suppose de C la perpendiculaire CA sur le plan TLX de l'orbite, et de son pied A une perpendiculaire Ax sur le rayon vecteur LT : prenant alors pour origine des coordonnées le centre fixe de la Terre, il pose le rayon variable TC $= r$, les angles variables ATC $= \psi$, LTA $= \varphi$, et, en sus, le rayon de la Terre $= a$, et celui de la Lune $= b$.

in Tellurem projiciendum, si valorem inventum paulo majorem faciamus ». En supposant la force projective dirigée suivant la droite qui joint le centre L de la Lune au point C′ de sa surface (qui est le lieu du corps lancé) et qui a 45° de longitude et autant de latitude, l'auteur arrive à cette conclusion : « Hinc sequitur vim projicientem 0,0005545 a = 3550^{met} in directione radii LC′ agentem, projicere corpus ad distantiam a Tellure, = 53,53203 a (a denotat radium Telluris), ubi etiam majori intensitate agit Tellus quam Luna, ideoque ipsum corpus tandem versus superficiem suam trahit ». Telle est la marche de la solution de la première partie de l'énoncée.

Pour en venir à la détermination du temps, M. *Verdam* reprend les trois équations trouvées plus haut entre $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ et les fonctions de r, φ, ψ etc., et constantes qui les représentent et il en tire trois valeurs de dt : « Harum, inquit, functionum hujus vel illius intégratione, tempus transitus prorsus innotescet; sed variæ analyseos methodi quibus in hanc finem usus sum, nullum auxilium mihi præbuerunt. » E plus loin « Si anguli φ et ψ in functione (7) $\left(\text{qui est } dt = \frac{dr}{F(r, \varphi, \psi, \text{etc.})}\right)$ non adessent, ideoque hæc functio a sola variabili r, ejusque differentiali dr penderet, accuratissime tempus t determinaretur ope methodi integralium definitarum. » Après beaucoup de tentatives inutiles et de recherches sans fruit, l'auteur dit : « Sed simul etiam mihi proposui huic responsioni imperfectæ, aliam adjungere problematis solutionem, magis autem particularem. » Et, en effet, après une courte digression sur les *aérolithes*, il dit : « Statuebant aut credebant igitur Physici hos Lapides explosione quadam e Luna in Tellurem esse ejectos. Calculabant ergo mathematici et imprimis ill. *De Laplace* et cl. *Poisson*, quanta vi corpus quoddam e Luna esset projiciendum ut in Tellurem perveniret et quanto temporis huic cursui opus foret (*) ». M. *Verdam* suppose que le corps projetté par la Lune, se meut suivant la direction

(*) Dans un petit écrit ayant pour titre : *Sur l'origine des comètes*, *Lagrange* dit en note : on pourrait supposer que les aérolithes sont lancés principalement par des volcans situés dans les régions polaires, et qui produisent en même temps les aurores boréales, lesquelles, suivant les obser-

du rayon vecteur TL, et il fait abstraction de la résistance de l'air et du mouvement de rotation de la Lune. « Invenimus, autem in hoc casu, vim projicientem $= 1894 =$ fere 1900^m; adest igitur inter hunc valorem atque illum qui a *Poisson* inventus dicitur (Conn. des temps, A° 1804, pag. 405) differentia 400^m (*) ». L'auteur cherche à rendre raison de cette différence. Passant ensuite à la recherche du temps nécessaire pour que le corps parvienne de la Lune à la Terre, il trouve $t = 4$ j. o h. 53′ 45″, tandis que M. *Poisson* trouve $t = 2\frac{1}{2}$ jours; « Sed attendendum est nos adsumsisse spatium a corpore, prima temporis particula percursum, $= 1900$ metris, cum vero ille posuerit 2300 metra. » M. *Verdam* termine cet écrit par cette phrase qui caractérise sa modestie : « Tum enim nil mihi restat in præsenti, nisi ut EORUM in judicando indulgentiæ, etiam atque etiam commendem hanc scriptiunculam quam sentio esse levissimam et nulla laude dignam (opinion que nous sommes loin de partager), si falso opinatus sim de calculo *Cl. Poisson*, et si generalis illa solutio quam instituere tentavi, absolvere autem non potui, imprimis postularetur. »

J. G. G.

Jaarboekje over 1826 *uitgegeven op last van S. M. den Koning.* A La Haye, imprimerie de l'état; prix 80 cents, in-12.

Cet *Annuaire*, rédigé par M. *Lobatto*, a été imprimé aux frais de S. M. le Roi des Pays-Bas. On y trouve comme dans celui que publie

---

vations qu'on trouve dans les mémoires de l'Académie de Stockholm, sont souvent accompagnées de tremblemens de terre dans le nord. Le fer natif renfermé dans l'intérieur des aérolithes, indiquerait qu'ils viennent de l'intérieur de la Terre où les minéraux peuvent conserver leur état primitif. Dans cet écrit, *Lagrange* recherche quelle serait la force d'explosion nécessaire, pour briser une planète, de manière qu'un de ses morceaux pût devenir comète. Je tiens de l'auteur un exemplaire de ce mémoire, corrigé de sa main.

(*) M. *Poisson* a trouvé dans l'ouvrage cité, que la force de projection doit être capable de faire parcourir librement au corps, *primo temporis secundo*, un espace de 2300 mètres.

le bureau des longitudes de France, une foule de tables concernant le lever et le coucher des principaux astres, les hauteurs des marées, l'échange des monnaies, les pesanteurs spécifiques, les élémens de notre système planétaire, etc. On y trouve encore plusieurs tableaux où sont consignées les hauteurs auxquelles sont parvenues les eaux des principaux fleuves du royaume, pendant les différens jours de l'année.

Cette partie si intéressante et qui nous concerne de si près, a été traitée avec toute l'étendue qu'elle mérite. M. *Lobatto* a eu soin aussi de donner les longitudes et latitudes de cent-cinquante villes des Pays-Bas, en indiquant leurs distances respectives aux villes d'Amsterdam, de Bruxelles et de La Haye. Cette précaution mérite d'autant plus d'éloges, qu'il s'est glissé quelques erreurs dans la *Connaissance des temps*, publiée par le bureau des Longitudes de Paris et que ce dernier ouvrage, estimable d'ailleurs sous tant de rapports, pourrait être pris pour autorité dans ce qui concerne la position de ces villes. On y lit par exemple que Liége est en Allemagne, ainsi que Ruremonde, Tongres, Venloo; et que Courtrai est en France. Les documens qui concernent la population, sont d'autant plus dignes d'attention, qu'ils ont été puisés dans les papiers du Ministère de l'intérieur. M. *Lobatto* n'a pas pu dresser encore des tables de mortalité pour le royaume, parce que ce travail est immense et que son attention a dû se porter d'abord sur une foule d'autres objets. Il s'est contenté de donner la table que j'ai calculée pour Bruxelles (*), en réduisant tous les nombres en parties du nombre 10,000. Nous savons que plusieurs personnes instruites s'occupent en ce moment de recherches semblables pour les grandes villes du royaume; elles pourront ainsi aider M. *Lobatto*, dans un travail pour lequel un seul homme devient presque insuffisant. Pour moi, je m'estimerai heureux d'avoir donné l'exemple dans un genre de recherches si intéressantes pour un pays où se forment des sociétés d'assurances. M. *Lobatto* s'est occupé cependant de rechercher quelles étaient les lois des décès et des naissances dans les villes d'Amsterdam, Gand, La Haye, Rotterdam et Anvers. Les résultats qu'il a obtenus s'accordent de la manière la plus satisfaisante avec ceux auxquels je suis parvenu de mon côté.

(*) *Corresp. Math.* tom. I, pag. 78.

N'ayant eu connaissance de cet annuaire que lorsque ce cahier était à-peu-près composé, je dois renvoyer au numéro suivant l'exposition des résultats statistiques les plus intéressans que l'on y remarque. On y aura une nouvelle preuve que nous sommes dans un des pays les mieux favorisés pour l'accroissement de la population. Ces avantages généralement moins sentis que ceux que nous donnent notre position politique, méritent cependant aussi d'être appréciés.

A. Q.

⁂ Nous avons reçu de M. *Egter*, premier lieutenant d'infanterie attaché au dépt. de la guerre, à La Haye, deux solutions dont l'une se rapporte à la question 3.° proposée (I.er vol. de la *Correspondance*, pag. 358), et déjà répondue par M. *P. F. Verhulst*, pag. 80 du présent cahier : comme la solution de M. *Egter* et celle de M. *Verhulst*, ont entre elles quelqu'analogie, et que la première ne pourra paraître que dans le cahier suivant, nous croyons devoir observer que l'auteur ne pouvait avoir aucune connaissance de la seconde, puisque le cahier qui la contient, n'était qu'à moitié imprimé lorsque nous avons reçu l'autre. Même observation sur la seconde solution de M. *Egter*, qui nous est arrivée en même temps, et qui sera consignée dans le prochain numéro.

J. G. G.

⁂ *La physique des Gens du monde*, enseignée en vingt leçons, par MM. *C. De Cheppe* et *Powell*, in-12, à Bruxelles, chez *P. J. Demat*, avec 23 planches.

Jamais on n'a composé plus d'ouvrages élémentaires sur les différentes branches des sciences; jamais aussi on n'en a peut-être vu paraître autant de défectueux, autant de blâmables sous le rapport de la correction et de la clarté. Nous ne pouvons guères faire ce dernier reproche à la *Physique des Gens du monde* : on y trouve des notions diverses sur la mécanique, l'astronomie et les différentes parties de la physique, qui sont en général présentées avec beaucoup de méthode. Un grand nombre de figures concourent encore à dévelop-

par le texte. Cet ouvrage, traduit de l'Anglais sur la quatrième édition, est surtout destiné, comme le titre l'annonce, à donner aux Gens du monde des idées claires sur une des parties les plus intéressantes des sciences : on conçoit que par là même il doit devenir moins utile aux savans qui n'y trouveraient que des notions très-élémentaires.

⁂ M. *Simons* vient d'être nommé observateur à l'Université d'Utrecht, pour les sciences astronomiques. A. Q.

Observation sur l'Addition, pag. 77.

⁂ A la suite de l'Addition (pag. 77), j'aurais dû citer la pag. 174 du *Recueil de diverses propositions de Géométrie de M. Puissant*, d'où cette solution est empruntée. Je rétablis ici cette omission, et, à cette occasion, j'observerai d'abord que cette construction est employée pour raccorder deux parties rectilignes et contigues de chemins ou de canaux qui ne sont pas dans la même direction; en second lieu, que *La Hire*, dans les mémoires de l'Académie, année 1702, et *Wentzius*, dans les *Acta Helvetica*, avaient appliqué l'analyse au cas particulier où les deux droites AB et AC (*fig.* 33) sont à angles droits, circonstance qui n'a presque jamais lieu dans la pratique. On voit donc que cette question n'est pas de fraîche date. Dans une note *sur l'application de la théorie des solutions particulières des équations différentielles, à des questions qui intéressent la pratique de l'art de l'ingénieur* (10.me cahier du Journal de l'Ecole Polyth.) M. *Prony* est conduit à cette construction des courbes du second degré : « Tracez un cercle qui ait pour centre le centre de » la courbe, et pour diamètre son axe 2A; faites mouvoir un équerre » de manière qu'un de ses côtés passant toujours par le foyer, le » sommet de l'angle droit, parcoure toujours le cercle dont il vient » d'être question; le second côté de l'équerre sera toujours tangent » à la courbe qu'on veut décrire. Dans le cas de la parabole, le cer- » cle sur lequel doit se mouvoir le sommet de l'angle droit, devient » une droite menée par le sommet de la courbe, perpendiculairement » à l'axe ». Les considérations présentées dans cette note, s'appliquent aisément au cas de trois dimensions. Au reste, nous pourrons

faire connaître le théorème analytique d'où l'auteur a tiré ces propriétés et plusieurs autres qui ne sont ainsi que des conséquences directes de la belle théorie *des solutions particulières des équations différentielles*. J. G. G.

Question proposée par l'Université de Louvain, pour le concours de 1826 — 1827.

Comparentur et dijudicentur methodi, instrumenta, formulæ quibus inquiratur in solidorum corporum expansionem per calorem.

Questions à résoudre.

1.° Etant données deux droites A et B qui concourent en R, et un point M situé hors du plan AB, mener par M une droite qui, prolongée, aille passer par R.

*N.*ª Cette question est une généralisation de celle qui a été résolue (*Corresp.* tom. II, pag. 7).

2.° Soit a la base donnée d'un triangle : on demande le lieu des sommets pour qu'on puisse toujours inscrire dans ce triangle un cercle du rayon r.

ASTRONOMIE (*).

Nouvelle Comète périodique.

Nous allons présenter un extrait des lettres que M. *Gambart*, Directeur de l'observatoire de Marseille, a adressées à M. *Bouvard*, au sujet de cette comète et qui ont été communiquées au bureau des longitudes.

(*) La note de M. *Bouvard* nous étant arrivée trop tard pour être mise sous le titre *Astronomie*, nous l'avons renvoyée à la fin de ce cahier pour ne pas en priver nos lecteurs. Il nous est agréable d'annoncer que ce célèbre Astronome se propose de venir visiter notre royaume, à la suite d'un voyage qu'il fait actuellement en Angleterre. A. Q.

M. *Gambart* annonce au bureau par une lettre du 10 mars, qu'il a découvert le 9 une comète dans la constellation de la *Baleine*. (Elle avait été découverte par M. *Biela* le 27 février.)

Lettre du 22 mars. — M. *Gambart* envoie les observations qu'il a faites depuis le 9 jusqu'au 21, et d'où il a déduit sept positions de la comète. C'est au moyen de ces positions qu'il a calculé les élémens paraboliques suivans :

« Passage au périhélie, mars 1826, 18 j., 94 temps moyen compté » de minuit, à Marseille.

Distance périhélie.............	0,961
Longitude du périhélie........	3ˢ. 14°. 20′. 0″.
Inclinaison..................	14°. 39′. 15″.
Longitude du nœud ascendant.	8ˢ. 7°. 54′. 10″.

Mouvement direct.

« Le rapport qui existe entre l'orbite à laquelle ces premières ob- » servations m'ont conduit et celles des comètes de 1772 et surtout » de 1805, me paraît mériter l'attention des Astronomes. Je considère » comme à-peu-près certain que la comète de 1772 était la même. » La révolution de 1826 — 1805 = 20, ne satisfait point; celle de » 10 ans n'irait point encore; mais avec trois révolutions de 1805 » à 1826, vous satisfaites à l'intervalle de 1772 à 1805. Ce qu'il y » de bien remarquable encore, c'est que M. *Gauss* en 1805, trouvait » une ellipse de cinq ans, et il prétendait que cette ellipse satisfaisait » mieux qu'aucune parabole. L'ellipse que je demande, est de 6,74 » ans; voilà ce qui doit servir de base à mes recherches. »

Lettre du 29 mars. « Veuillez présenter au bureau des Longitudes, » les élémens elliptiques que je vais transcrire. J'espère aussi que » vous voudrez bien en parler à l'Académie ». (La lettre de M. *Gambart* a été lue à la séance du bureau des longitudes du mercredi 5 avril, et à l'Académie des sciences le lundi 10, en même temps que celle de M. *Shumacher*.)

« Je vous ai parlé dans ma dernière lettre (22 mars) de mes con- » jectures sur la révolution de 6,737 ans qui satisfaisait aux passages » des trois comètes savoir : de 1772, 1805 et 1826. J'ai entrepris » mon travail dans cette idée : en voici le résultat. Les observations » de 1826, les seules que j'aie considérées, sont représentées d'une » manière très-satisfaisante par l'ellipse suivante.

» Passage au périhélie, mars 1826, 19 j., 5998 temps moyen compté » de minuit à Marseille.

$\frac{1}{2}$ Grand axe................	3, 567 log. 0.5523031
Excentricité.................	0, 74187 = sin 47°. 53'. 30".
Distance périhélie...........	0,92071.
Log. moyen mouvement......	2,7326487.
Log. $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$............	0,4146846.
Longitude du périhélie.......	3ˢ, 18°. 54'. 19".
Longitude nœud ascendant...	8. 9. 55. 33.
Révolution.................	13. 50. 47.
Inclinaison......... 2461 jours.	

Mouvement direct.

» Vous remarquerez que cette ellipse est la même, pour ainsi dire, » que celle de M. *Gauss;* il n'y a de différence que sur la révolution; » M. *Gauss* la prenait de 4,77 ans. S'il satisfaisait ainsi aux obser- » vations, ne suis-je point assuré d'y satisfaire? aussi l'identité des » trois comètes n'est-elle plus dès ce jour une question pour moi.

» L'ellipse que vous venez de voir, aurait pu être plus parfaite; » elle est susceptible d'amélioration, mais une précision plus grande » était inutile pour mon objet.

» Les 9, 17 et 21 mars, erreurs en longitude + 15", + 1" et + 20"; » erreurs en latitude — 2'. 24", + 1" et + 22 ».

Dans une lettre du 3 *avril,* M. *Gambart* annonce qu'il a soumis les observations de 1805 à l'ellipse de 6,737 ans. Les erreurs qu'il a trouvées, sont de même ordre que celles que présentent les observations de 1826.

Lettre du 5 *avril.* M. *Gambart* dit qu'il a comparé aux élémens elliptiques l'observation du 28 février, faite par M. *Biela* et celle du 4 avril qu'il a faite : les erreurs sont :

Le 28 février..... — 23" et — 8"
Le 4 avril........ + 4' 58" et + 1', 47"

Cette dernière observation paraît indiquer que la révolution de la comète, est trop forte. M. *Gambart* pense qu'il serait peut-être facile de mieux satisfaire aux observations, en prenant une révolution moitié plus petite, ou de 3^{ans}, 37. Il se propose d'examiner si cette supposition peut être admise.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

1.° *Diviser une droite, avec la règle seulement, en deux parties égales, pourvu qu'on ait une seule droite parallèle à celle-là; 2.° mener par un point donné, avec la règle seulement, une parallèle à une droite donnée, pourvu qu'on ait sur cette droite trois points équidistants; par M.* ADOLPHE LESCHEVAIN, *élève à l'Athénée royal de Tournay* (*).

1.° Soient (*fig.* 39) AB la droite à diviser et CD la droite qui lui est parallèle.

Par le point A je mène une droite quelconque qui coupe la parallèle CD en un point C, et par le point B je mène une autre droite qui coupe la première en un point H au-dessus de CD.

On aura de cette manière un triangle AHB dont les deux côtés AH et HB sont coupés aux points C et D par une parallèle à la base. Je mène les droites AD et BC; puis par le point R de leur intersection et par le sommet H je mène une droite RH : cette droite prolongée ira couper AB en un point M qui sera le milieu de cette droite.

En effet, il est démontré par l'analyse (**), que si on mène une

(*) M. *Sturm*, dans un mémoire inséré aux *Annales mathématiques de Nîmes*, mars 1826, déduit la solution de ces deux problèmes de la théorie des pôles et polaires.

(**) Géométrie analytique de M. *Garnier*, page 436, additions, problème II.

parallèle quelconque à la base d'un triangle, et si par les deux points où cette parallèle coupe les deux autres côtés du triangle, on tire des droites aux sommets des deux angles opposés, ces droites se coupent toujours en un point de la droite qui joint le sommet du triangle au milieu de la base. Ici CD est parallèle à la base AB : donc AD et BC se coupent en un point de la droite qui joint le sommet H au milieu de AB. Donc, si par les points H et R on tire une droite, cette droite prolongée divisera en deux parties égales, la droite AB.

2.° Soient (*fig.* 40) M le point donné et AC la droite donnée sur laquelle les points A, B, C, sont équidistants; B sera donc le milieu de AC : par les points A et M je tire une droite; je prends un point H de cette droite au-dessus de M, et je joins le point H au point C, ce qui donne un triangle AHC, puis le sommet H au milieu B de la base; par les points M et C je mène la droite MC qui coupe HB en un point R, et par les points R et A, je mène une droite AR que je prolonge jusqu'à son intersection N avec BC. On sait par le théorème précédent, que si MN est parallèle à AC, les droites AN et MC se coupent en un point R situé sur la droite HB qui joint le sommet H au milieu B de la base. Or, l'intersection R des droites AN et CM est sur HB; donc la droite menée par les points M et N, sera parallèle à AC, et conséquemment elle sera la droite demandée.

ADDITION.

La propriété rappelée dans la solution précédente, peut se démontrer facilement en partant des *Principes de la perspective,* posés II.e vol. de la *Corresp. Math. et Phys.*, pag. 3 et suiv. En effet joignons le point de concours H et l'œil O par une droite HO, et imaginons le plan de perspective parallèle à cette droite : les droites concourantes AH, BH et MH (*fig.* 39) menées du point H au milieu M de AB, seront, en perspective, des parallèles *ah*, *bh* et *mh*, cette dernière étant équidistante des deux autres; la figure ABDC aura donc pour perspective le parallélogramme *abdc* dans lequel les diagonales *ad* et *bc*, perspectives de AD et BC, se coupent en *r* sur la droite *nm* menée par les milieux *m* et *n* des deux côtés opposés *cd* et *ad*, et qui est aussi la perspective de MN : le point *r* sera la perspective de l'intersection R des droites AD, BC et NM. Donc *les deux diagonales d'un trapèze se coupent sur la droite qui joint les milieux des côtés parallèles.*

J. G. G.

De quelques maxima et minima du second degré, par M. J. N. Noel, professeur des Sciences phys. et math., principal de l'Athénée de Luxembourg (II.me et dernier article.)

Partager un nombre donné a *en* n *parties telles, qu'en multipliant chacune par celle qui la suit immédiatement et la dernière par la première, la somme des produits résultans soit un maximum.*

Soient x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n les n parties cherchées; on aura

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+\dots+x_n=a,$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+\dots+x_nx_1=b.$$

Pour éliminer une inconnue entre ces équations, prenons la valeur de x_3 dans la première, et posons, pour abréger, $h=x_6+x_7+\dots+x_n$; nous obtiendrons

$$x_3=a-x_1-x_2-x_4-x_5-h.$$

Substituant cette valeur dans la seconde équation proposée et développant, il viendra

$$x_1x_2+ax_2-x_1x_2-x_2^2-x_2x_4-x_2x_5-hx_2+ax_4-x_1x_4-x_2x_4$$
$$-x_4^2-x_4x_5-hx_4+x_4x_5+x_5x_6+\dots+x_nx_1=b.$$

Réduisant et changeant les signes des deux membres, on aura

$$x_2^2+2x_2x_4-ax_2+x_2x_5+hx_2-ax_4+x_1x_4$$
$$+x_4^2+hx_4-x_5x_6-x_6x_7-\dots-x_nx_1=-b \dots (3)$$

Préparant cette équation pour la résoudre par rapport à x_2, il vient d'abord

$$x_2^2-(a-2x_4-x_5-h)\,x_2=ax_4-x_1x_4-x_4^2-$$
$$x_4x_5-hx_4+x_5x_6+x_6x_7+\dots+x_nx_1-b;$$

d'où

$$x_2^2-(a-2x_4-x_5-h)\,x_2=p-b,$$

p désignant une quantité positive. Cette équation donne

$$x_2=\tfrac{1}{2}(a-2x_4-x_5-h)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(a-2x_4-x_5-h)^2+p-b}.$$

On voit que si les inconnues proposées ont les valeurs qui conviennent au maximum de b, ce maximum rendra nulle la quantité soumise au radical précédent et donnera

$$x_2=\tfrac{1}{2}(a-2x_4-x_5-h).$$

Résolvant l'équation (3) par rapport à x_4, on verra pareillement que le maximum de b fournit

$$x_4=\tfrac{1}{2}(a-2x_2-x_1-h).$$

Retranchant cette valeur de la précédente, on aura, toute réduction faite,

$$x_1=x_5.$$

Si l'on avait d'abord éliminé x_4, on aurait trouvé $x_2=x_6$; si l'on avait éliminé x_2, on aurait eu $x_4=x_n$; ainsi de suite. Ces résultats prouvent que, *pour le maximum de* b, *les coefficiens des deux multiplicateurs de l'inconnue éliminée, dans la seconde équation proposée, sont égaux entre eux.*

Ce principe ne saurait s'appliquer au cas de trois inconnues; mais alors le problême peut se résoudre directement, et donne, pour le maximum de b, $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{3}a$.

Lorsqu'il y a quatre inconnues, suivant qu'on élimine x_4, x_3, x_2, x_1, le principe précédent donne, pour le maximum de b,

$$x_2=x_2,\ x_1=x_1,\ x_4=x_4 \text{ et } x_3=x_3,$$

équations qui n'apprennent rien sur les inconnues proposées; le problême est donc alors indéterminé.

C'est ce qu'on peut vérifier directement; car alors les équations du problême, sont

$$x_1+x_2+x_3+x_4=a,$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1=b.$$

La première donne $x_4=a-x_1-x_2-x_3$: substituant cette valeur dans la seconde équation mise sous la forme,

$$x_2(x_1+x_3)+x_4(x_1+x_3)=b,$$

on aura, en réduisant,

$$a(x_1+x_3)-(x_1+x_3)^2=b;$$

d'où l'on tire

$$x_1+x_3=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b}.$$

On voit que le maximum de b donne $x_1+x_3=\frac{1}{2}a$; d'où $x_2+x_4=\frac{1}{2}a$. Le maximum de b ne pouvant donc fournir que deux équations entre les quatre inconnues x_1, x_2, x_3, x_4, le problême est évidemment indéterminé.

Lorsqu'il y a cinq inconnues, suivant qu'on élimine d'abord x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, le principe énoncé plus haut donne, pour le maximum de b,

$$x_2=x_3,\ x_1=x_2,\ x_1=x_3,\ x_4=x_5 \text{ et } x_3=x_4;$$

ces valeurs et la première équation proposée, fournissent $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{5}a$.

Si $n=6$, en éliminant d'abord $x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$, le maximum de b fournira

$$x_2=x_4,\ x_1=x_3,\ x_2=x_6,\ x_1=x_5,\ x_4=x_6 \text{ et } x_3=x_5;$$

d'où

$$x_1=x_3=x_5 \text{ et } x_2=x_4=x_6.$$

Ces valeurs réduisent les deux équations proposées à

$$x_1+x_2=\tfrac{1}{3}a;\ x_1x_2=\tfrac{1}{6}b;$$

d'où il est facile de conclure que le maximum de b répond à..... $x_1=x_2=\frac{1}{6}a$, et que par conséquent ce maximum a lieu lorsque $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=\frac{1}{6}a$.

En général, les parties de a sont égales entre elles, pour le maximum de b; mais le problême est indéterminé lorsque le nombre n de ces parties, est un multiple de 4. Par exemple, supposons $n=8$; nous aurons, d'après le principe énoncé plus haut,

$$x_2=x_6,\ x_1=x_5,\ x_4=x_8 \text{ et } x_3=x_7;$$

d'où les équations du problême deviendront

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\tfrac{1}{2}a,$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1=\tfrac{1}{2}b;$$

elles sont par conséquent de même forme que quand $n=4$; et conséquemment le problême est indéterminé.

Lorsque $n=12$, on trouve $x_2=x_6=x_{10}$, $x_1=x_5=x_9$, $x_4=x_8=x_{12}$ et $x_3=x_7=x_{11}$; d'où les équations du problème se réduisent encore à celles qui ont lieu lorsque $n=4$; ce problème est donc aussi indéterminé pour $n=12$. Il en sera de même pour $n=16$, 20, 24, etc.

Il résulte de la discussion précédente, qu'en général, *pour que les parties d'un nombre donné soient telles qu'en multipliant chacune par celle qui la suit immédiatement et la dernière par la première, la somme des produits résultans soit un maximum, il suffit que ces parties soient égales entre elles.*

Réciproquement, les calculs que nous venons d'employer démontrent que *si l'on connaît la somme des produits obtenus, au moyen de* n *nombres inconnus, en multipliant chacun par celui qui le suit immédiatement et le dernier par le premier, la somme de ces* n *nombres sera la moindre possible, quand ils seront égaux entre eux.* Voici une application de ce théorème :

Parmi les polygones de n *côtés et de même surface* S, *dans lesquels les droites menées d'un point intérieur aux sommets, divisent l'espace autour de ce point en* n *angles égaux, quel est celui où la somme de ces* n *droites est un minimum?*

Soient x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n les droites proposées et a le minimum de leur somme, et soit s le sinus de l'angle égal à $\frac{360^\circ}{n}$: il est clair que les aires des triangles qui composent le polygone cherché, sont respectivement

$$\tfrac{1}{2}sx_1x_2;\ \tfrac{1}{2}sx_2x_3;\ \tfrac{1}{2}sx_3x_4;\ \tfrac{1}{2}sx_4x_5,\ \ldots;\ \tfrac{1}{2}sx_nx_1;$$

si donc on désigne par b le nombre $\frac{2S}{s}$, on aura les deux équations

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+\ldots+x_n=a,$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+\ldots+x_nx_1=b.$$

Ces équations sont précisément celles du problème précédent; elles conduisent donc aux mêmes valeurs pour le minimum de a, et il en résulte que *parmi les polygones de* n *côtés et de même surface* s, *dans lesquels les droites menées d'un point intérieur aux sommets, divisent l'espace autour de ce point en parties égales, celui où la somme de ces droites est la moindre possible, est le polygone régulier dont le centre est au point donné.*

Il en résulte aussi ce théorème : *Parmi tous les polygones de* n *côtés et d'une même somme de droites menées des sommets à un point intérieur et divisant en parties égales l'espace autour de ce point, celui dont l'aire est la plus grande, est le polygone régulier ayant son centre au point donné.*

Nous terminerous ici les applications de la théorie des *maxima* et des *minima* du second degré. On trouve un grand nombre de ces curieuses applications dans les *Mélanges mathématiques*, pages 131 et suivantes, ainsi que dans l'*Algèbre élémentaire*, où j'ai énoncé (pages 302 et 303) plusieurs théorèmes relatifs au maximum ou au minimum d'une variable dans les parallélipipèdes, les tétraèdres rectangles, les cylindres, les cônes, etc.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE.

Solution du problème proposé Correspond. Math. et Phys., *pag.* 130; *par M.* Manderlier, *candidat en sciences à l'Université de Gand.*

Par un point quelconque E *donné, mener une droite qui aboutisse au point d'intersection de deux droites données.*

Soit pris (*fig.* 41) le plan des deux droites AB et CD, pour plan horizontal, et concevons que le plan vertical passe par le point donné, et soit perpendiculaire à l'une des deux droites, et, par exemple, à CD. Le point E se trouvant dans le plan vertical, sera lui-même sa projection verticale et sa projection horizontale sera E′ sur la ligne de la terre. Par la droite AB concevons un plan quelconque dont la trace verticale soit PR; par le point I, où cette trace coupe la verticale EE′, menons GIK que nous pouvons considérer comme la projection verticale d'une droite; par un point quelconque F de GD, menons FF′ que nous considérerons comme la projection horizontale de la même droite : cette droite percera le plan mené par AB, puisque ces projections ne sont pas parallèles aux traces du plan. Pour trouver les projections de ce point d'intersection, il faut, comme on le sait, mener par FF′ un plan vertical qui coupera l'autre dans une droite

qui devra contenir le point d'intersection; la projection verticale de cette droite est $fH'K$, et comme elle coupe GI au point K, K sera la projection verticale du point cherché, et K' sa projection horizontale. Cette projection K pourrait se trouver directement, en concevant par GK un plan perpendiculaire à celui de la projection verticale; ce nouveau plan couperait celui mené par AB, dans une droite dont la projection horizontale serait OE'K'; ainsi O, E' et K' doivent être en ligne droite; donc K'E' sera la projection horizontale de la droite demandée, et comme elle doit percer le plan horizontal en un point de la perpendiculaire CG, en menant EG, on aura la projection verticale de la même droite. Les projections d'une droite étant connues, on connaît sa direction. Donc, etc.

La construction serait absolument la même, si le point E était donné de manière que sa projection E' sur le plan des deux droites, tombât hors de ces droites.

On peut de plus connaître la longueur vraie de la droite qui va du point donné au point de concours : car si d'un point quelconque M (*fig.* 42) de cette droite et dont les projections soient M' et M'', on mène une perpendiculaire sur le plan vertical, sa projection horizontale M'T sera sa longueur vraie; et si l'on suppose que le triangle MM''E, tourne autour de M''E comme charnière, pour s'abattre sur le plan vertical, MM'' ne cessera pas d'être perpendiculaire à la charnière EM'', et comme on connaît d'ailleurs sa longueur M'T, il sera facile de construire le triangle MM''E, dans lequel l'angle E sera celui que la droite fait avec le plan vertical. Si maintenant on conçoit que le triangle formé par la droite, par sa projection verticale GE et par l'horizontale OG, tourne autour de EG, jusqu'à ce qu'il soit dans le plan vertical, l'angle formé par la droite et le plan ne changera pas; si donc on prolonge EM, et qu'on élève sur GE la perpendiculaire GN, EN sera la longueur de la droite cherchée.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Solution algébrique d'un probléme de Géométrie à trois dimensions, par M. Hachette, *professeur à la faculté des sciences de l'Académie de Paris, etc.*

M. *Bruno,* de Naples, a proposé et résolu par la méthode des anciens, la question suivante (*).

» Etant donnés un point et deux droites dans l'espace, mener » par le point, un plan qui coupe les deux droites en deux autres » points, tels que les trois points soient les sommets d'un triangle » semblable à un triangle donné. »

Ce problême peut être résolu algébriquement de la manière suivante :

Je prends (*fig.* 43) pour plan des xy, le plan mené par le point donné A, parallèlement aux deux droites données, et pour axes des x et des y, les parallèles à ces droites, menées par le point A pris pour origine des coordonnées x et y. Nous supposerons que les droites données soient projetées orthogonalement sur le plan des xy, suivant BDM et BEN; que ces projections comprennent l'angle connu DBE, ou MBN $= \gamma$ et que les distances respectives des droites au même plan soient f et f'; en sorte que leur plus courte distance qui se projette au point B, soit $f - f'$. Nous supposerons encore que la projection du triangle demandé sur le plan des xy soit AMN; le point M ayant

---

(*) Voyez son mémoire in-4.° de 20 pages sous le titre : *Soluzione geometrica di un difficil problema di sito* (1825), à Naples. La solution de M. *Hachette,* est tirée d'un mémoire fort intéressant dans lequel l'auteur a bien voulu nous permettre de prendre des extraits. Ce mémoire est destiné à paraître en entier dans le Recueil de l'Académie de Bruxelles.

A. Q.

pour coordonnées l'abscisse inconnue $AP = x$, et l'ordonnée connue $MP = AD = a$; le point N a pareillement pour coordonnées l'abscisse connue $AE = b$, et l'ordonnée inconnue EN ou $AQ = y$.

La question est ramenée à trouver deux relations entre les inconnues x et y.

Le triangle cherché a pour côtés

1.° La droite de la longueur $\sqrt{(\overline{AM}^2 + f^2)}$, dont la projection est AM :

2.° La droite de la longueur $\sqrt{(\overline{AN}^2 + f'^2)}$, dont la projection est AN :

3.° La droite de la longueur $\sqrt{(\overline{MN}^2 + (f - f')^2)}$, dont la projection est MN :

Il suffit donc de trouver sur le plan des xy, les valeurs des trois côtés AM, AN, NM.

Pour y parvenir, abaissons les perpendiculaires MR et NS sur l'axe des x, et la perpendiculaire NT sur l'axe des y : on aura, en faisant $AD = a$, $AE = b$; $MR = a \sin. \gamma$, $PR = a \cos. \gamma$, $AR = x + a \cos. \gamma$, $AM = a^2 \sin.^2 \gamma + (x + a \cos. \gamma)^2$, $\overline{AM}^2 = x^2 + 2ax \cos. \gamma + a^2$. Nommant l, l', l'' les trois côtés du triangle demandé dont les projections sont respectivement AM, AN et MN, on aura

$$l^2 = \overline{AM}^2 + f^2 = x^2 + 2ax \cos. \gamma + a^2 + f^2.$$

de même

$$NT = b \sin. \gamma, QT = b \cos. \gamma, AT = y + b \cos. \gamma, \overline{AN}^2 = b^2 \sin.^2 \gamma + (y + b \cos. \gamma)^2, \text{ ou } \overline{AN}^2 = y^2 + 2by \cos. \gamma + b^2,$$

et par conséquent

$$l'^2 = y^2 + 2by \cos. \gamma + b^2 + f'^2.$$

pour l'' on remarquera

1.° Que $NS = y \sin. \gamma$, $ES = y \cos. \gamma$, $AS = AE + ES = b + y \cos. \gamma$.
2.° Que $\overline{MN}^2 = (AR - AS)^2 + (NS - MR)^2$

donc

$$MN^2 = [x + a \cos. \gamma - (b + y \cos. \gamma)]^2 + (y \sin. \gamma - a \sin. \gamma)^2,$$

et en ordonnant

$$\overline{MN}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos. \gamma + 2x (a \cos. \gamma - b) - 2y (a + b \cos. \gamma) + a^2 + b^2 - 2ab \cos.^2 \gamma$$

donc

$$l''^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos.\gamma + 2x(a\cos.\gamma - b) - 2y(a + b\cos.\gamma) + a^2 + b^2 - 2ab\cos.\gamma + (f_{,} - f')^2.$$

Puisque le triangle formé par les côtés l, l', l'' est semblable à un triangle donné, on aura pour déterminer x et y, les trois équations suivantes dont deux comportent la troisième, K et K$'$ étant des rapports connus,

$$\mathrm{K}l^2 = l''^2 = \mathrm{K}(x^2 + 2ax\cos.\gamma + a^2 + f^2) \ldots (1)$$
$$\mathrm{K}'l'^2 = l''^2 = \mathrm{K}'(y^2 + 2by\cos.\gamma + b^2 + f'^2) \ldots (2)$$

d'où

$$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}(x^2 + 2ax\cos.\gamma + a^2 + f^2) = y^2 + 2by\cos.\gamma + b^2 + f'^2. \quad (3)$$

Considérant deux quelconques de ces trois équations, comme appartenant à deux courbes du second degré rapportées aux axes obliques AX et AY, les points d'intersection de ces courbes détermineront les points M et N sur les projections des droites données, et par conséquent le triangle dont ces points sont les projections.

La quantité cos. γ qui entre dans l'expression de l''^2, prenant les deux valeurs $\pm$ cos. γ, il s'ensuit qu'il y a deux couples de courbes du second degré, qui résolvent le problême proposé, et comme chaque couple donne en général quatre points d'intersection, il s'ensuit que le problême proposé a huit solutions, c'est-à-dire que l'on peut placer sur les deux droites huit triangles de similitude donnée, qui auraient pour sommet commun le point A.

Dans le cas particulier où les deux droites se rencontreraient, le point de rencontre serait le sommet de huit pyramides qui auraient pour bases des triangles semblables à un triangle donné.

On peut donc supposer que ces huit pyramides soient construites sur une base commune, et que leurs sommets soient du même côté à l'égard du plan de cette base; il est évident que les huit pyramides symétriques à celle-là et de même base, ne différeront des huit autres que par la position des sommets placés symétriquement par rapport au plan de la base, c'est-à-dire du côté opposé à celui des premiers sommets, et qu'elles satisferont aux deux conditions d'avoir même base, et des angles opposés aux côtés de la base, respectivement égaux à des

angles donnés. Cette conclusion s'accorde avec la solution de ce cas particulier, que j'ai donnée dans mon *Traité de Géométrie descriptive*, année 1822 (pages 153 et 263), et antérieurement dans la *Corresp. sur l'Ecole polytechnique* (cahier de juillet 1812, pages 332—337).

Il est à remarquer que dans l'équation (3), cos. γ n'entre que dans les deux termes linéaires $\frac{2akx}{K'}$ cos. γ et $2by$ cos. γ, et que la courbe représentée par cette équation, dans l'hypothèse de cos. γ positif, satisfait également au cas de cos. γ négatif : il n'en est pas de même des équations (1) et (2) dont chacune représente deux hyperboles correspondantes à ($\pm$ cos. γ). Ces deux lignes sont coupées par l'hyperbole de l'équation (3), et le nombre de points d'intersection est en général de huit.

La solution synthétique de M. *Bruno*, s'obtient aussi par l'intersection de deux hyperboles.

Extrait d'une lettre à Monsieur HACHETTE, *professeur à la faculté des sciences de Paris, etc.*

Le mémoire que vous avez bien voulu m'envoyer sur le problème de M. *Bruno*, a vivement excité ma curiosité; j'ai parcouru avec le plus grand plaisir, les choses intéressantes qu'il contient, et il me sera bien agréable de pouvoir les communiquer aux lecteurs de notre Journal, comme je l'ai déjà fait à l'Académie de Bruxelles. La solution analytique que vous donnez du problème de M. *Bruno*, m'a paru aussi simple qu'élégante, et la discussion historique à laquelle elle donne lieu, répand un nouvel intérêt sur le problème. Ce sujet m'a paru si piquant, que je m'en suis occupé par forme d'exercice; j'ai l'honneur de vous soumettre ici les résultats auxquels je suis parvenu.

On demande de construire un triangle *abc* semblable à un triangle donné : *a* est le point de l'espace qui doit servir de sommet à ce triangle, *m* et *n* les deux droites sur lesquelles doivent se trouver les extrémités de la base.

Soit *abc* un triangle semblable au triangle proposé : supposons que son sommet *a* soit au point donné, et qu'une des extrémités de la base, *b* par exemple, repose sur la droite *m*. Si l'on fait alors tourner le plan du triangle autour de *ab* comme charnière, l'autre extrémité *c* de la base décrira une circonférence. Si l'on suppose maintenant que le point *b* prenne toutes les positions possibles sur la droite *m*, le triangle restant toujours semblable au proposé, et qu'à chacune de ses positions, le point *c* engendre une circonférence, la suite de toutes ces circonférences formera une surface qui contiendra tous les points *c* que comporte la question. Or, cette surface sera coupée généralement en quatre points par la seconde droite *n* ; ce seront autant de solutions de la question : mais on aurait pu faire parcourir la droite *m* par l'extrémité *c* de la base, et l'on aurait eu alors quatre autres solutions qui, jointes aux précédentes, donnent les huit solutions que comporte en tout la question.

Je fais donc dépendre le problême de l'intersection d'une droite et d'une surface : cette solution ne peut avoir d'avantage qu'autant que cette surface soit facile à construire ou bien présente une équation facile à traiter. Nous allons voir que ces deux avantages se trouvent ici réunis; mais d'abord, nous nous arrêterons à un théorème de géométrie de position assez curieux, et qui, je crois, n'est point connu. Le voici : *quand dans un plan, un triangle semblable à un autre, a un sommet et un point fixe, et un second sommet qui parcourt une droite, le troisième sommet parcourt également une droite.*

Soit (*fig.* 44) *a* le sommet fixe, *b* le sommet qui parcourt la droite MM'; le sommet *c* parcourra la droite *a'c*. Pour le prouver, abaissons la perpendiculaire *cb'* sur le côté *ab*; le pied *b'* de la perpendiculaire parcourra une droite *m*X parallèle à celle que parcourt le point *b*, à cause du rapport constant qui existera toujours entre *ab* et *ab'*, en vertu de la similitude des triangles. Cela posé, si l'on compare les triangles semblables *amb'* et *b'cx*, en prenant pour axes rectangulaires Y*m* et *m*X, et en représentant les coordonnées *cx* et *mx* par *y* et *x*, on aura

$$y : x - mb' = mb' : ma$$

d'où l'on déduit

$$y^2 + (x - mb')^2 : \overline{mb'}^2 + \overline{ma}^2 = y^2 : \overline{mb'}^2;$$

mais à cause des triangles rectangles, les termes du premier rapport

valent $\overline{cb'}^2$ et $\overline{ab'}^2$ qui sont toujours, d'après l'hypothèse, dans un rapport constant de m^2 à 1; on en déduit donc

$$m^2 : 1 = y^2 : \overline{mb'}^2$$

d'où

$$mb' = \frac{y}{m}$$

cette valeur de mb' portée dans la première proportion, donne

$$y : x - \frac{y}{m} = \frac{y}{m} : ma \text{ ou } a$$

ce qui conduit à cette équation de la ligne qui est le lieu des points tels que c

$$y = mx - m^2a.$$

C'est l'équation d'une droite $a'c$ dont la position dépend des valeurs attribuées à m et a.

Il serait facile de voir que si le triangle $ab'c$ était symétriquement placé de l'autre côté de ab', son sommet se trouverait encore sur une droite passant par a' et symétriquement disposée par rapport à $a'c$, de l'autre côté de l'axe aa'.

Maintenant, d'après ce qui a été dit plus haut, à une même position a et b de deux sommets d'un triangle, correspondent une infinité de positions différentes pour le troisième sommet c, et tous ces sommets se trouvent sur une circonférence dont le centre b' est sur l'axe mx, dont le plan est perpendiculaire à la droite ab', et dont le diamètre cc' proportionnel à cette droite, est déterminé de longueur entre les deux droites fixes qui passent par le point a'.

Ces notions préliminaires étant admises, j'en viens aux solutions du problême que s'est proposé M. *Bruno*.

Solution par l'analyse.

Soient, comme précédemment, mY et mX les axes des coordonnées rectangulaires et cherchons l'équation de la surface qui est le lieu géométrique de toutes les positions que peut prendre le sommet c du triangle semblable au triangle donné : cette surface pourra être considérée comme produite par les intersections successives d'une sphère mobile dont le centre parcourt l'axe mx, et dont le rayon est proportionnel

à la droite ab', avec un plan passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à cette même droite ab'. Si nous désignons par a la distance am, par α la distance mb', et par m le rapport de $b'c$ à $b'a$, l'équation de la sphère sera

$$y^2+z^2+(x-\alpha)^2=m^2.\overline{b'a}^2=m^2(a^2+\alpha^2);$$

on aura d'ailleurs pour équation du plan

$$y=\frac{\alpha}{a}(x-\alpha)$$

Eliminant maintenant α qui particularise dans ces deux équations, la position du plan et celle de la sphère, nous aurons une équation qui conviendra à toutes les lignes d'intersection de ces deux surfaces mobiles : ce sera donc l'équation de la surface demandée. Les équations précédentes pourront être mises sous la forme

$$y^2+z^2+x^2-m^2a^2=2\alpha x-\alpha^2+m^2\alpha^2$$
$$ay=\alpha x-\alpha^2$$

la première équation se simplifie un peu, en ayant égard à la seconde, et elle devient

$$y^2+z^2+x^2-m^2a^2=2ay+\alpha^2(1+m^2).$$

En éliminant maintenant de cette équation la valeur de α au moyen de la dernière des deux précédentes, on trouve

$$y^2+z^2+x^2-m^2a^2=2ay+(1+m^2)\left(\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-ay}\right)^2$$

Telle est l'équation de la surface sur laquelle doivent se trouver les quatre points cherchés; mais ces points doivent se trouver encore sur la droite n qui a pour équations

$$y=px+q;\quad z=p'x+q'$$

éliminant y et z entre ces trois équations, on aura définitivement une équation du quatrième degré qui donnera les valeurs de x, et qui sera de cette forme après les réductions,

$$Ax^2+Bx+C=(1+m^2)\left(\frac{x}{2}\pm\sqrt{A'x^2+B'x+C'}\right)^2.$$

En regardant chacun des membres de cette équation comme la valeur d'une même ordonnée Y, déduite des équations de deux courbes diffé-

rentes, on a

$$Ax^2+Bx+C=Y^2 \text{ et } Y=(1+m^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\pm\sqrt{A'x^2+B'x+C'}\right)$$

ce sont les équations de deux sections coniques. Je me suis arrêté à ces derniers détails, pour montrer comment avec mes résultats je rentre dans ceux qu'on obtient par les deux autres solutions. J'ai seulement cet avantage d'obtenir tout de suite l'équation qui doit être le résultat de l'élimination de la valeur de l'ordonnée entre les équations des deux courbes du deuxième degré. On aurait pu substituer encore les valeurs de y et z déduites des équations de la droite n, dans les équations primitives du plan et de la sphère mobile. Ces dernières équations, du deuxième degré, seraient devenues ainsi des fonctions de x et α. Il est bien remarquable ici, que je n'ai besoin pour déterminer mon équation, que de deux constantes savoir : a la distance du point fixe à l'axe, et m le rapport entre la perpendiculaire abaissée du sommet du triangle et la distance du pied de cette perpendiculaire à l'angle opposé du triangle.

Nous donnerons dans le numéro suivant, la solution de ce même problême par la Géométrie descriptive : nous n'aurons plus qu'à construire ce qu'indiquent les équations précédentes.

A. Q.

Sur le volume des onglets coniques et cylindriques, par M. Timmermans, *professeur au Collége royal de Gand.*

Soit (*fig.* 45) un cône droit et circulaire SAB coupé par un plan quelconque DCE, et proposons-nous de déterminer le volume de l'onglet conique DCEBD; à cet effet, par le sommet S et la droite DE faisons passer un plan; le corps SDEB étant du genre des pyramides, aura pour expression de son volume, le produit de la base DBE par le tiers de la hauteur SO : le corps SDEC pouvant de même être considéré comme une pyramide ayant pour base DCE, et pour sommet le point S, aura par conséquent pour volume

$$\frac{DCE \,.\, SG}{3};$$

le volume de l'onglet sera donc égal à

$$\frac{DBE.SO}{3}-\frac{DCE.SG}{3}\ldots\ldots\ldots\ldots (1):$$

il nous reste à déterminer la surface de la section DCE; supposons que le plan coupant prolongé vienne couper le côté SA en L; la section sera une ellipse dont le grand axe LC est déterminé par la proportion

$$LC : SC = \sin. LSC : \sin. L,$$

d'où, en représentant le grand axe par 2A, l'angle LSC par 2S, l'angle LCB par c et la droite SC par a,

$$2A=\frac{a \sin. 2S}{\sin. (c-2S)}.$$

Quant au demi petit axe, on sait qu'il est moyen proportionnel entre MC et LK (*); en sorte que $B^2 = MC.LK = LS.SC \sin.^2 S$, ou bien en substituant la valeur de LS tirée du triangle SLC,

$$B^2=\frac{a^2 \sin. c \sin.^2 S}{\sin. (c-2S)}.$$

Concevons que l'on ait décrit sur LC comme diamètre un demi-cercle, et prolongeons la perpendiculaire DE à ce diamètre, jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle; on sait que le segment de cercle déterminé par le prolongement de DE, est au segment elliptique DCE dans le rapport du grand axe de l'ellipse au petit; mais si on représente CF par b, la surface du segment circulaire sera

$$A^2 \text{ arc} \left(\cos. = \frac{A-b}{A}\right) - (A-b) \sqrt{b(2A-b)},$$

et par conséquent celle du segment elliptique

$$BA \text{ arc.} \left(\cos. = \frac{A-b}{A}\right) - \frac{B(A-b)}{A} \sqrt{b(2A-b)};$$

on aura donc pour volume de l'onglet conique, en représentant par h la hauteur du cône et par S le segment connu DBE, et en rempla-

(*) Voyez le cahier précédent, page 78.

çant SG par sa valeur a sin. c,

$$\frac{S.h}{3}-\left[AB\,arc.\left(\cos.=\frac{A-b}{A}\right)-\frac{B(A-b)}{A}\sqrt{b(2A-b)}\right]\frac{a\sin.c}{3}.$$

Si la section DCE devient parallèle au côté SL, l'expression précédente se reduit à

$$\frac{S.h}{3}-\tfrac{4}{9}\sin.S\sin.2S\sqrt{a^3b^3}.$$

Enfin si la section est une hyperbole, on aura

$$C<2S;$$

alors B devient imaginaire et A négatif; représentant par A′ et B′ les demi-axes réels et positifs, on trouvera en faisant usage de la formule

$$z\sqrt{-1}=\log.(\cos.z+\sqrt{-1}\sin.z)$$

$$\frac{S.h}{3}-\left[A'B'\log.\left(\frac{A'+b+\sqrt{(2A'+b)b}}{A'}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{B'(A'+b)\sqrt{b(2A'+b)}}{A'}\right]\frac{a\sin.c}{3}.$$

Cette dernière formation pourrait servir à déterminer la surface d'un segment hyperbolique sans faire usage du calcul intégral; en sorte que ce problême qui jusqu'ici avait été exclu des élémens, rentrerait par là dans son domaine.

Addition à ce qui précède et solution du problême n.° III, proposé II.e vol. pag. 64.

On détermine par des considérations semblables la surface d'un onglet conique. On peut regarder en effet la surface du cône comme celle d'une pyramide régulière composée de petits triangles qui ont un sommet commun : tous ces triangles sont également inclinés sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône et que nous supposerons horizontal. Ainsi leurs surfaces sont à leurs projections dans ce dernier plan, comme le rayon est au cosinus de l'angle d'inclinaison ou au sinus de la moitié de l'angle au centre du cône. Comme ce rapport est invariable dans toute l'étendue du cône, on voit sans peine que *si l'on a une figure quelconque tracée sur sa surface, et si on la*

projette sur le plan horizontal, l'aire de la projection sera à celle de la figure proposée, comme le sinus de la moitié de l'angle au centre du cône, est au rayon. D'après cela, l'aire de l'onglet DCEB vaut l'aire de sa projection DHEB divisée par le sinus de la moitié de l'angle au centre du cône : mais l'aire DHEB est évidemment comprise entre un arc de cercle DBE et un arc d'ellipse DHE; on pourra donc l'évaluer sans peine.

Si l'on coupe le cône par un plan de manière à produire une ellipse, la surface S du cône comprise entre le plan qui contient l'ellipse E, et le sommet du cône, sera à la surface S′ qui lui sert de projection dans le plan horizontal, comme le rayon R est au sinus de la moitié de l'angle α au centre du cône. Ainsi $S : S' = R : \sin. \frac{1}{2}\alpha$. Mais l'ellipse E est à cette même surface S′ qui lui sert aussi de projection, comme R est au cosinus de l'angle que son grand axe fait avec le plan horizontal ou au sinus de l'angle β que ce grand axe fait avec l'axe du cône, donc $E : S' = R : \sin. \beta$. De ces deux proportions on déduit $S : E = \sin. \beta : \sin. \frac{1}{2}\alpha$; mais on a aussi $\sin. \beta : \sin. \frac{1}{2}\alpha = LS : LI$ ou bien $= LS + SC : LI$. *L'aire du cône droit tronqué qui a pour base une ellipse, est donc à l'aire de cette ellipse, comme la somme des rayons vecteurs menés du sommet aux extrémités du grand axe de l'ellipse, est à ce même grand axe.* On trouverait des propositions analogues pour les autres surfaces que l'on pourrait séparer sur le cône par des plans. Dans le II.me vol. des *Mém. de l'Acad. de Brux.*, j'ai donné plusieurs théorèmes semblables, d'après des considérations qui m'ont conduit aussi d'une manière très-simple aux équations des courbes qu'on obtient en développant la surface du cône.

MM. *Timmermans* et *Egter* nous ont fait parvenir chacun, une solution analytique du problême proposé à la page 316 du I.er vol., dont j'ai donné également une solution dans le cahier précédent, en la rattachant à plusieurs théorèmes sur les sections coniques. Malgré leur simplicité, nous nous dispenserons donc de les donner ici.

A. Q.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Sur les équations réciproques.

On sait qu'on donne ce nom aux équations dont une racine est x et l'autre $\frac{1}{x}$, en sorte qu'une moitié des racines x, étant a, b, d, etc., l'autre moitié sera $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{d}$, etc. Ces équations sont donc d'un degré pair, et telles qu'elles ne changent pas par le changement de x en $\frac{1}{x}$: cette propriété sert à trouver les relations générales qui doivent exister entre les coefficiens. En effet, soit l'équation

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 - Ex + F = 0 \ldots\ldots (1)$$

si l'on remplace x par $\frac{1}{x}$, qu'on multiplie par x^6, qu'on divise par F, et qu'on écrive le premier membre dans un ordre inverse, on aura

$$x^6 - \frac{E}{F}x^5 + \frac{D}{F}x^4 - \frac{C}{F}x^3 + \frac{B}{F}x^2 - \frac{A}{F}x + \frac{1}{F} = 0. \quad (2)$$

Or, l'identité entre les premiers membres des équation (1) et (2), donne

$$A = \frac{E}{F}, B = \frac{D}{F}, C = \frac{C}{F}, D = \frac{B}{F}, E = \frac{A}{F}, F = \frac{1}{F}$$

d'où l'on tire $F = E = A$, $D = B$; et conséquemment la proposée deviendra

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Bx^2 - Ax + 1 = 0$$

dont les coefficiens des termes équidistans des termes extrêmes, ou de celui du milieu, sont les mêmes et affectés des mêmes signes.

Si l'on multiplie l'équation réciproque

$$z^6 + Az^5 + Bz^4 + Cz^3 + Bz^2 + Az + 1 = 0$$

par $z + 1$, on aura une équation de degré impair à coefficiens équi-distans égaux, qui aura les racines réciproques de la proposée, et n sus la racine $z = 1$: cette équation sera de la forme

$$z^7 + pz^6 + qz^5 + sz^4 + sz^3 + qz^2 + pz + 1 = 0 \ldots\ldots (3)$$

et, en posant $z = \frac{x}{c}$, on aura celle-ci

$$x^7 + pcx^6 + qc^2x^5 + sc^3x^4 + sc^4x^3 + qc^5x^2 + pc^6x + c^7 = 0.$$

Ainsi l'équation réciproque de la forme la plus générale, sera

$$x^m + pcx^{m-1} + qc^2x^{m-2} + \ldots\ldots + qc^{m-2}x^2 + pc^{m-1}x + c^m = 0 \ldots (4)$$

m pouvant être pair ou impair. C'est dans cette forme générale que rentrent les quotiens des équations binomes $x^m - 1 = 0$ par $x - 1$. L'équation (4) revient à celle-ci

$$(x^m + c^m) + pcx\,(x^{m-2} + c^{m-2}) + qc^2x^2\,(x^{m-4} + c^{m-4}) + a = 0$$

Dans l'hypothèse de m impair, cette équation est satisfaite par $x = -c$, et conséquemment elle est divisible par $x + c$: le quotient de degré pair, sera de la forme

$$(x^{2r} + c^{2r}) + pcx\,(x^{2r-2} + c^{2r-2}) + qc^2x^2\,(x^{2r-4} + {}^{2r-4}) + \text{etc.} = 0$$

laquelle divisée par x^rc^r, se transforme dans celle-ci

$$\left(\frac{x^r}{c^r} + \frac{c^r}{x^r}\right) + p\left(\frac{x^{r-1}}{c^{r-1}} + \frac{c^{r-1}}{x^{r-1}}\right) + q\left(\frac{x^{r-2}}{c^{r-2}} + \frac{c^{r-2}}{x^{r-2}}\right) + \text{etc.} = 0. (5)$$

dont toutes les racines sont réciproques. On réduira (5) au moyen de la formule suivante

$$a^n + b^n = (a+b)^n - \frac{n}{1}\,ab\,(a+b)^{n-2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}\,a^2b^2\,(a+b)^{n-4}$$

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-4}{3}\,a^3b^3(a+b)^{n-6} \ldots \pm \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2p+1}{2}\cdot\frac{n-2p+2}{3}$$

$$\ldots\frac{n-p-1}{p}\,a^pb^p\,(a+b)^{n-2p} \pm \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

qu'on trouve dans un mémoire de M. *Ampère*, ayant pour titre :

Considérations sur la Théorie mathématique du Jeu. Si l'on n'en veut qu'une démonstration par induction, on partira de cette égalité

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

multipliant les deux membres par $a+b$, et dégageant a^3+b^3, il vient

$$a^3+b^3=(a+b)^3-2ab\,(a+b)$$

multipliant de nouveau de part et d'autre par $a+b$, dégageant a^4+b^4, remplaçant a^2b^2 par $(a+b)^2-2ab$, on trouve

$$a^4+b^4=(a+b)^4-4ab\,(a+b)^2+2a^2b^2$$

et ainsi de suite.

Si dans (6) on fait les hypothèses $a=\frac{x}{c}$, $b=\frac{c}{x}$, qui donnent $ab=1$, $a+b=\frac{x}{c}+\frac{c}{x}$, et que de plus on pose

$$a+b=\frac{x}{c}+\frac{c}{x}=z,\ \text{d'où}\ x^2-czx+c^2=0\ldots\ (7)$$

on aura cette transformée

$$\frac{x^n}{c^n}+\frac{c^n}{x^n}=z^n-\frac{n}{1}z^{n-2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}z^{n-4}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-4}{3}z^{n-6}$$
$$+\ldots\pm\frac{n}{1}\cdot\frac{n-2p+1}{2}\cdot\frac{n-2p+2}{3}\cdots\frac{n-p-1}{p}z^{n-2p}\ldots\ (8)$$

Maintenant que dans (5), on écrive pour $\frac{x^r}{c^r}+\frac{c^r}{x^r}$ et les autres binomes entre parenthèses, les valeurs que prend la formule (8) pour $n=r$, $=r-1$, $=r-2$, etc., la transformée en z sera du degré $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ selon que, dans la proposée (4), m sera pair ou impair. Or, connaissant les r, c'est-à-dire les $\frac{m}{2}$ ou les $\frac{m-1}{2}$ valeurs de z, on trouvera les $2r$, c'est-à-dire les m ou les $m-1$ valeurs de x d'après (7), et on a, en outre, $x=-c$, dans le cas de m impair.

Ainsi la proposée étant

$$x^7+pcx^6+qc^2x^5+sc^3x^4+sc^4x^3+qc^5x^2+pc^6x+c^7=0$$

c'est-à-dire,

$$(x^7+c^7)+pcx\,(x^5+c^5)+qc^2x^2\,(x^3+c^3)+sc^3x^3\,(x+c)=0$$

laquelle divisée par $x+c$, donne le quotient

$$(x^6+c^6)+(p-1)\,cx\,(x^4+c^4)+(1-p+q)\,c^2x^2\,(x^2+c^2)$$
$$+(s-q+p-1)\,c^3x^3=0$$

divisant par c^3x^3, il vient

$$\left(\frac{x^3}{c^3}+\frac{c^3}{x^3}\right)+(p-1)\left(\frac{x^2}{c^2}+\frac{c^2}{x^2}\right)+(1-p+q)\left(\frac{x}{c}+\frac{c}{x}\right)$$
$$+(s-q+p-1)=0$$

or, d'après (8), on a

$$\frac{x^3}{c^3}+\frac{c^3}{x^3}=z^3-3z;\ \frac{x^2}{c^2}+\frac{c^2}{x^2}=z^2-2,\ \frac{x}{c}+\frac{c}{x}=z;$$

donc la précédente devient

$$z^3+(p-1)\,z^2+(q-p-2)\,z+(s-q+p-1)=0$$

qui donne trois valeurs de z à chacune desquelles, d'après (7), répondent deux valeurs de x.

L'équation binome $x^{11}-1=0$ divisée par $x-1$, donne l'équation réciproque

$$x^{10}+x^9+x^8+\ldots\ldots+1=0$$

qui s'abaisse au cinquième degré par l'hypothèse $x+\frac{1}{x}=z$: en appliquant l'analyse précédente, on arriverait à la transformée

$$z^5+z^4-4z^3-3z^2+3z+1=0$$

qui, après le changement des signes, se change dans l'équation résolue par *Vandermonde,* lequel dit *Lagrange* (Résol. des Equat. num. not. XIV) est le premier qui ait franchi les limites dans lesquelles la résolution des équations à deux termes, se trouvait resserrée. Au reste, observe ce Géométre, il est plus avantageux à l'égard des équations binomes, d'employer les formules connues en cosinus et sinus.

J. G. G.

Solution du 1.er *problême proposé à la page* 358 *du premier vol. de la* Correspondance math. et phys.; *par M.* Egter van Wissekerke (*voyez* II.e *vol. de la* Corr. math. et phys. *pag.* 138).

Le problême se reduit à démontrer que $\sqrt{M^2+N^2}$ est égale à la valeur réelle de $\sqrt[n]{\pm Z}$.

Puisque d'abord

$$\sqrt[n]{+1} = \cos.\frac{2m\pi}{n} + \sin.\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}$$

et

$$\sqrt[n]{-1} = \cos.\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sin.\frac{(2m+1)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

on a

$$\sqrt[n]{+Z} = \sqrt[n]{Z} \times \sqrt[n]{+1} = \sqrt[n]{Z} \times \cos.\frac{2m\pi}{n} + \sqrt[n]{Z} \times \sin.\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[n]{-Z} = \sqrt[n]{Z} \times \sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{Z} \times \cos.\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt[n]{Z} \times \sin.\frac{(2m+1)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

dans lesquelles

$$M = \cos.\frac{2m\pi}{n}\sqrt[n]{Z},\ \text{ou} = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n}\sqrt[n]{Z}$$

$$N = \sin.\frac{2m\pi}{n}\sqrt[n]{Z},\ \text{ou} = \sin.\frac{(2m+1)\pi}{n}\sqrt[n]{Z}$$

$$M^2 = \cos.^2\frac{2m\pi}{n}\sqrt[n]{Z^2},\ \text{ou} = \cos.^2\frac{(2m+1)\pi}{n}\sqrt[n]{Z^2}$$

$$N^2 = \sin.^2\frac{2m\pi}{n}\sqrt[n]{Z^2},\ \text{ou} = \sin.^2\frac{(2m+1)\pi}{n}\sqrt[n]{Z^2}$$

Additionnant, on obtient dans ces deux cas

$$M^2 + N^2 = \sqrt[n]{Z^2}\ \text{d'où}\ \sqrt{M^2+N^2} = \sqrt[n]{Z}$$

MÉCANIQUE.

Suite et fin de l'article de M. PAGANI. III.e Partie.

Recherche des fonctions qui jouissent de quelques propriétés remarquables en Mécanique.

On ramène la recherche des propriétés générales de la Mécanique, à une seconde transformation de l'équation fondamentale. Pour cela, faisons d'abord

$$\delta\Pi = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

$$u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

et l'on trouvera facilement

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = d.\left(\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{dt^2}\right) - \tfrac{1}{2}\delta.u^2.$$

En substituant dans l'équation (9), il viendra

$$\int\left[(\delta\Pi - \tfrac{1}{2}\delta.u^2)\,dt + d.\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)\right]Dm = 0. \quad (11)$$

Cette équation est la seconde transformée de l'équation (9), et c'est elle qui sert à faire découvrir toutes les autres propriétés générales de la Mécanique, mais qui ne le sont point autant que celles qu'on déduit de l'équation (10). Le principe *de la conservation des forces vives;* celui *de la plus grande* ou *de la plus petite force vive;* ceux *de la moindre action, de la plus grande* ou *de la plus petite quantité d'action;* enfin la *loi de repos* de *Maupertuis,* ne sont que des corollaires très-simples de l'équation (11), auxquels l'auteur parvient successivement et avec la plus grande facilité. Ceux qui désirent avoir plus de détails sur ce sujet, pourront consulter le mémoire qui se trouve imprimé dans le tome III de la *Collection de l'Acad. Royale des sciences de Bruxelles.*

ASTRONOMIE.

Sur la nouvelle comète périodique.

Nous avons donné dans le numéro précédent les extraits de plusieurs lettres de M. *Gambart,* concernant les élémens de la nouvelle comète périodique qui vient d'être découverte; nous allons y joindre les observations de ce même astronome, qui nous sont communiquées par M. *Alph. Desplas,* Directeur de l'observatoire de Toulouse, afin d'offrir aux personnes qui s'occupent d'astronomie, les moyens de soumettre au calcul les élémens de la même comète.

A. Q.

La comète découverte le 9 de ce mois à Marseille, a été observée malgré le clair de lune, ainsi qu'il suit :

1826 Mars.	T. M. Compté de minuit.	Asc. Observées.	Déclinaisons Observées.
9	20^h 10^m 12^s	37° 45′ 31″	10° 11′ 31″ bo.le
11	19 54 17	39 59 08	10 18 11
13	19 27 1	42 15 9	10 26 20
15	19 51 26	44 36 9	10 33 55
17	19 47 55	46 58 29	10 39 40
19	19 32 46	49 22 32	10 44 38
21	19 52 36	51 51 10	10 48 9

PHYSIQUE.

Sur le Magnétisme par rotation.

M. *Arago* a fait connaître, l'année dernière, à l'institut de France, une expérience nouvelle sur l'action qu'une aiguille aimantée, librement suspendue, éprouve de la part de tous les corps et sur-tout des métaux. L'aiguille est, comme on sait, suspendue immobile au-dessus du centre d'une plaque circulaire de la substance dont on veut connaître le pouvoir (*); lorsque l'on donne à cette plaque une vitesse de rotation même fort petite, l'aiguille est déviée de sa direction primitive; si le mouvement est uniforme et lent, elle se fixe invariablement dans une position nouvelle; si le mouvement est assez rapide, l'aiguille déviée de plus d'un angle droit, finit par décrire une circonférence et peut même prendre un mouvement de rotation qui s'accélère. Dans ces expériences, l'aiguille est mise à l'abri de l'agitation de l'air dans une cage de verre. Il est remarquable que la plaque circulaire perd presque toute son influence sur l'aiguille, lorsque l'on pratique à sa surface, suivant différens rayons, des fentes très-étroites qui diminuent à peine sa masse.

MM. *Herschell* et *Babbage*, en répétant ces belles expériences (**), ont trouvé que lorsqu'on remplit les fentes de la plaque en les soudant, ou bien en y versant un autre métal en fusion, le disque reprend toute son énergie; mais il n'en est pas de même lorsqu'on y verse un liquide ou qu'on y place de la limaille même très-pressée. En prenant pour unité l'action du cuivre, des disques de différens métaux, animés du même mouvement, doivent être classés, pour leurs effets, dans l'ordre

---

(*) Voyez *le Nouveau Bulletin des Sciences* de la Société Philomatique page 5, année 1825. Voyez aussi les *Annales de Chimie*.

(**) *Transact. Philos. de Londres,* pour 1825, et *le Bulletin Universel des Sciences,* mars 1826.



suivant : cuivre 1; zinc 0,93; étain 0,46; plomb 0,25; antimoine 0,09; bismuth, 0,02. Mais si l'on a égard au temps nécessaire pour produire une déviation donnée avec une certaine vitesse uniforme, le classement change un peu, et le zinc doit alors être placé avant le cuivre. Ces habiles physiciens ont été conduits à cette conséquence remarquable, que le temps est un élément dont il faut tenir compte, quand il y a développement de magnétisme par influence.

Lorsqu'on voudra répéter ces expériences, on pourra, pour rendre les effets incomparablement plus sensibles, employer les moyens suivans qui m'ont toujours fait connaître d'une manière sûre les plus petites forces qui tendent à produire une déviation dans l'aiguille. Je commence par soustraire cette aiguille à l'action du globe, en plaçant convenablement des barreaux aimantés, et si alors les effets que l'on observe sont encore très-faibles, on peut, pour les mettre mieux en évidence, faire suivre au plateau les oscillations de l'aiguille : de cette manière, en fesant décrire au disque alternativement dans les deux sens des arcs, même de très-peu d'étendue, on fait pirouetter l'aiguille au bout de quelques instans; les oscillations prennent successivement plus d'amplitude et l'aiguille finit par suivre les mouvemens du plateau, comme si elle y était attachée. Lorsque l'aiguille oscille, si l'on fait faire au plateau des oscillations en sens inverse, on finit par la fixer presqu'aussitôt. L'intensité de la force exercée sur l'aiguille, paraît être la même pour les différens points du plateau. En prenant les précautions indiquées précédemment, on peut encore faire osciller une aiguille, lorsque son extrémité seule est en présence du bord du disque.

Sur le pouvoir magnétique des rayons les plus réfrangibles du soleil, par M.[ress] SOMERVILLE, *traduit par* A. QUETELET. (Le mémoire a été lu à la Société Royale, le 2 février 1826.) [*]

En 1823, le professeur *Morichini*, de Rome, découvrit que l'acier exposé aux rayons violets du spectre solaire, acquiert la vertu magné-

(*) Nous sommes redevables de ce mémoire *Extrait des Transactions Philo-*

tique : ses expériences ont été répétées sans succès par le professeur *Configliachi*, de Pavie, ainsi que par M. *Bérard*, de Montpellier. Je ne pense pas que quelqu'un les ait essayées dans ce pays, peut-être par l'idée que des expériences qui ont quelquefois manqué en Italie, ne réussiraient probablement pas dans nos climats plus septentrionaux. La pureté peu commune du ciel m'engagea cependant l'été dernier à essayer ce que l'on pouvait faire dans ces climats. En conséquence, au mois de juillet, je fixai dans une fente pratiquée exprès au volet d'une chambre, un prisme équiangle de flint glas, dont les trois faces étaient chacune de 1,4 à 1,1 pouces : près de ce prisme et sur un panneau opposé, était projeté un spectre coloré, à la distance de près de cinq pieds. Je pris pour sujet de l'expérience une aiguille à coudre très-fine d'un pouce de longueur, après m'être convaincue d'abord qu'elle n'était nullement magnétique, en exposant à différentes reprises ses deux extrémités aux pôles nord et sud d'une aiguille aimantée très-sensible sur laquelle elle agissait toujours de la même manière à chaque épreuve. L'aiguille aimantée employée comme aiguille d'essai dans ces expériences, est faite d'une aiguille à coudre aimantée, perçant de part en part un petit morceau de bouchon dans lequel est insérée une chappe conique de verre ; le tout est suspendu sur la pointe d'une aiguille dressée perpendiculairement.

Je n'ai point connaissance jusqu'à présent de la manière dont le professeur *Morichini* a conduit ses expériences ; mais je remarquai qu'il n'était point vraisemblable que toute l'aiguille étant également exposée aux rayons violets, la même influence put en même temps produire

---

sophiques, pour 1826, à l'obligeance de M. *Van Breda*, professeur à l'Université de Gand, chez lequel nous avons eu l'avantage de rencontrer Mistress *Somerville*, à son retour de Paris, où elle fut accueillie avec une distinction particulière par M. le marquis *de Laplace*, comme étant du très-petit nombre des Géomètres qui aient lu en entier la *Mécanique céleste* qu'on sait, en effet, compter beaucoup moins de lecteurs que de proneurs. M.[ress] *Somerville* est liée en Angleterre avec les hommes les plus distingués dans les lettres et dans les sciences : son commerce plein de douceur ne laisse pas soupçonner la supériorité de son esprit : le mari de cette femme célèbre exerce avec distinction, la profession de médecin à Londres.

J. G. G.

un pôle sud à l'une des extrémités, et un pôle nord à l'autre. Je couvris donc la moitié de l'aiguille de papier, et je la fixai au panneau avec de la cire, entre dix et onze heures du matin; je la mis dans une position telle que la partie découverte fut exposée aux rayons violets; l'aiguille était placée dans un plan vertical, presque perpendiculaire au méridien magnétique et inclinée à l'horizon. Comme je n'avais point d'héliostat, il devint nécessaire de faire mouvoir l'aiguille dans une direction parallèle à elle-même, pour conserver toujours la partie découverte dans les rayons violets.

Le soleil était brillant, et, en moins de deux heures, j'eus la satisfaction de trouver que l'extrémité de l'aiguille qui avait été exposée aux rayons violets, attirait le pôle sud de l'aiguille aimantée et repoussait le pôle nord. Je m'étais assurée d'abord qu'il n'y avait point de fer dans le voisinage qui pût troubler les résultats. L'expérience fut répétée le même jour, dans des circonstances exactement semblables, dans la vue de découvrir quelque cause d'erreur qui aurait pu échapper à l'observation dans un premier essai; mais le résultat fut le même que la première fois.

La saison était si favorable qu'elle me fournit chaque jour l'occasion de répéter les expériences, en changeant la grandeur des aiguilles et toujours en prenant particulièrement soin de m'assurer qu'elles n'étaient point aimantées. Les aiguilles furent placées dans différentes directions dans le plan du méridien magnétique, quelquefois dans l'angle d'inclinaison, quelquefois perpendiculairement au méridien magnétique, enfin sous différens angles à son égard. Dans certains cas, les têtes des aiguilles furent exposées à la place des pointes dans les rayons violets. Peut-être on aurait pu s'attendre à ce que l'influence eût été plus grande dans les expériences où les aiguilles étaient placées dans le plan du méridien magnétique et sous l'angle d'inclinaison; et conséquemment à ce que la polarisation s'établit plutôt dans ces circonstances; cependant il ne parut pas y avoir de différence; les aiguilles devenaient aimantées, les unes plutôt que les autres, en variant d'une demi-heure jusqu'à quatre heures, d'après des circonstances que je n'ai pu découvrir encore : cependant plusieurs résultats m'ont induite à croire que les expériences réussissent mieux de dix heures à midi ou à une heure, que dans le reste de la journée. La partie de l'aiguille découverte offrait presque toujours le pôle nord;

soit qu'elle fut dirigée en haut ou en bas. Dans quelques expériences qui offrirent un résultat contraire, on doit sans doute attribuer les effets obtenus à une prédisposition de l'aiguille au magnétisme, trop faible pour avoir été observée.

La distance de l'aiguille au prisme, fut changée fréquemment en fixant l'aiguille à un écran, mais sans changement matériel dans les effets. Je trouvai qu'il était inutile d'obscurcir la chambre; il suffisait de placer le prisme de manière à projeter le spectre sur une place où ne tombaient pas les rayons du soleil.

Mon premier soin fut ensuite de chercher à m'assurer si quelques autres des rayons les plus réfrangibles avaient les mêmes propriétés que les rayons violets. Un rang d'aiguilles soigneusement examinées comme précédemment, furent donc soumises aux différens rayons du spectre solaire; les aiguilles exposées aux rayons bleus et verts acquerraient souvent la propriété magnétique, quoique moins fréquemment; et ils exigeaient une exposition plus longue que lorsqu'on les soumettait aux rayons violets; mais l'aimantation paraissait aussi énergique dans ce cas que dans celui où les rayons violets étaient employés. La partie exposée prenait un pôle nord. Les rayons indigos réussissaient presqu'aussi bien que les violets.

Des morceaux de ressorts de montres et d'horloges furent ensuite essayés, avec l'idée qu'ils pourraient, par leur couleur bleue, être plus susceptibles d'une influence magnétique, ce qui arriva effectivement; l'étendue plus grande de leur surface néanmoins, ou leur souplesse peuvent avoir contribué à cette prédisposition. Les morceaux de ressorts étaient longs de deux à trois pouces et larges d'un huitième à une moitié de pouce. Il était difficile de se procurer des ressorts de montres ou d'horloges non-aimantés; il arriva même, dans une occasion, que quoique le ressort entier fut neutre, les morceaux dans lesquels il fut découpé, devinrent magnétiques. Dans une expérience, les morceaux furent chauffés au point de perdre leur magnétisme et leur couleur; ils exigèrent alors une exposition plus longue aux rayons pour acquérir la polarité. De grands poinçons furent exposés sans effet aux rayons violets, leur masse étant peut-être trop forte. En essayant des aiguilles aimantées, leur vertu magnétique augmenta. Le D.r *Wollaston* eut la complaisance de me prêter une grande lentille dont le centre était couvert de papier et qui lui avait servi dans ses re-

cherches sur les rayons chimiques. La lentille concentra les rayons violets et produisit un effet magnétique dans un temps plus court que le prisme; mais par le déplacement rapide du soleil, il devint difficile de conserver l'aiguille au foyer. L'effet fut produit avec une égale facilité, en projetant le spectre sur le plancher de la chambre; mais on ne peut pas toujours compter sur le même succès, lors même que le temps paraît le plus favorable.

Je fis alors les expériences suivantes au moyen d'un verre bleu. Trois aiguilles non-aimantées, ayant leur moitié recouverte de papier, furent placées horizontalement sur une pierre en dehors d'une fenêtre exposée au midi, sous un verre bleu, foncé coloré de cobalt, et à un soleil très-ardent; après avoir resté dans cette position pendant trois ou quatre heures, elles avaient acquis un faible degré d'aimantation, et la partie découverte présentait le pôle nord : ces aiguilles, le jour suivant, avaient perdu leur magnétisme, circonstance qui ne s'était point encore présentée, quoique j'eus occasion de l'observer quelquefois par la suite, lorsque la force du soleil diminua par l'avancement de la saison : il n'y avait pas de fer dans le voisinage, et lorsque l'aiguille aimantée fut placée sur différens endroits de la pierre, elle ne s'y trouva point influencée. Le jour suivant, l'expérience fut répétée avec cette différence que les aiguilles furent exposées sous le verre bleu pendant six heures, et alors les aiguilles n'avaient pas acquis seulement une aimantation très-sensible; mais elles la conservèrent pendant l'espace de près de six mois. Des morceaux de ressort d'horloge, qui avaient été chauffés, comme nous l'avons déjà dit, s'aimantèrent aussi sous le verre bleu.

J'eus la curiosité de m'assurer si cette espèce de verre permet aux rayons chimiques de passer, et occasionne par là le changement d'état de l'acier : j'employai donc pour épreuve et de la manière suivante, un liquide contenant du muriate d'argent en solution : un morceau de papier trempé dans le liquide, fut coupé en deux parties égales, dont l'une fut placée sous le verre bleu, et l'autre sous un verre blanc, autant que possible au même instant; mais l'un ne devint pas noir plutôt que l'autre; et en les comparant, il fut impossible d'y trouver aucune différence dans l'intensité de couleur, tous deux ayant été également exposés aux rayons chimiques. L'expérience fut répétée avec le même résultat. Le 26 août, le thermomètre étant à midi à

66°, deux morceaux neutres de ressort d'horloge furent exposés au soleil, l'un sous un fragment plus épais du même verre bleu que dans l'expérience précédente, et l'autre sous un verre vert; tous deux s'aimantèrent.

Le 31 août, le thermomètre était à midi à 68°; ayant réussi à produire l'aimantation dans les circonstances mentionnées, j'essayai ensuite l'effet de morceaux de ressort d'horloge non-aimantés, exposés au soleil et enveloppés dans de la soie violette et verte. La moitié de chacun était couvert de papier comme précédemment, et les morceaux de ressort enveloppés l'un dans un ruban vert, l'autre dans un violet, furent fixés à la partie intérieure du châssis d'un carreau de fenêtre, où ils demeurèrent exposés au soleil pendant tout le jour; vers le soir, tous deux avaient acquis la vertu magnétique, quoique ce fussent deux morceaux du même ressort qui, comme nous l'avons dit, s'était aimanté plus faiblement pour avoir été chauffé; et comme précédemment les parties exposées au soleil sous le ruban, présentaient le pôle nord.

Pour reconnaître si la chaleur avait ici quelque part dans le développement du magnétisme, j'exposai trois fragmens du même acier à la grande ardeur du soleil, le 1.er septembre, le thermomètre étant à midi à 70° : la moitié de chacun était enveloppée de papier, mais l'autre extrémité n'était couverte ni par le verre ni par le ruban; et quoique la chaleur fut plus grande que la veille, l'aimantation n'eut point lieu.

Le 2 septembre, le thermomètre étant à midi à 68°, un morceau d'acier blanc non-aimanté acquit la vertu magnétique, étant exposé au soleil, enveloppé d'un ruban vert, et ayant une de ses moitiés couverte de papier blanc comme précédemment.

Le 3 septembre, le thermomètre étant à midi à 68°, deux fragmens de ressort s'aimantèrent, l'un exposé dans un ruban de couleur violette, et l'autre sous un verre bleu, pendant qu'un pareil fragment de ressort ne fut nullement influencé pour avoir été exposé à la lumière blanche; chacun avait une moitié couverte de papier.

Le thermomètre étant à midi à 68°, le 4 septembre, cinq grandes aiguilles à coudre, de deux pouces de longueur, furent exposées aux rayons du soleil, l'une sous un verre bleu, une autre sous un verre vert, une autre dans un ruban violet, une autre dans un ruban vert,

une autre enfin à la lumière blanche; la moitié de chacune était couverte de papier. De toutes ces aiguilles, deux seulement s'aimantèrent, savoir : celle qui était sous le verre bleu et celle qui était dans le ruban violet.

Le 20 septembre, le thermomètre étant à 69°, je plaçai des morceaux d'acier enveloppés dans du ruban violet et vert, et sous des verres de différentes couleurs, dans différentes positions à l'égard du méridien magnétique et de l'angle d'inclinaison. Plusieurs acquirent l'aimantation et la partie découverte présenta le pôle nord. Un morceau d'acier devint plus fortement magnétique que d'ordinaire, exposé sous un ruban vert, dans une position perpendiculaire à l'horizon et presque dans le méridien magnétique. Pendant quelque temps j'obtins toujours des résultats semblables, quoique l'aimantation devint plus faible à mesure que la saison avançait et que le soleil diminuait de force; j'ai donc dû remettre mes expériences ultérieures jusqu'à ce que le retour de l'été vienne me permettre de les reprendre.

Des résultats que j'ai obtenus, je suis induite à croire que les rayons les plus réfrangibles du spectre solaire, ont une influence magnétique, même dans ces régions (*).

MÉTÉOROLOGIE.

Sur les étoiles filantes.

En parlant des étoiles filantes dans notre numéro précédent, j'exprimai le regret de ne pas avoir trouvé dans les *Annales de Gilbert*, le mode d'observation qu'avaient suivi les Astronomes allemands : je proposais alors, faute de mieux, la méthode que j'avais employée moi-même et qui m'avait paru la plus simple. Ayant eu depuis l'occasion

(*) Nous rendrons compte dans le cahier suivant de quelques expériences sur l'aimantation des aiguilles par la lumière, qui viennent d'être faites à Gand et à Bruxelles. A. Q.

de voir M. *Lohrmann* (*) à qui l'on doit les observations que j'ai citées, j'ai eu le plaisir d'apprendre de la bouche de cet habile astronome, que sa méthode est exactement la mienne, et qu'il s'y était arrêté après plusieurs autres essais infructueux. M. *Lorhmann* m'a fait connaître alors relativement à ces météores, plusieurs faits intéressans que j'aurais communiqués dès à présent à nos lecteurs, s'il ne m'avait promis de m'envoyer lui-même des renseignemens plus étendus, lors de son retour à Dresde. Je ne puis cependant m'empêcher de donner ici quelques remarques sur les étoiles filantes, que je tire d'un ouvrage de M. *Brandes,* imprimé à Leipsig en 1820, sous le titre : *Beiträge zur Witterungskunde,* etc. Des observations faites par ce savant et par *Benzenberg* (**), il résulte que ces météores se montrent à la hauteur de 1 jusqu'à 30 milles; qu'ils ont une vitesse de plusieurs milles par seconde et qu'ils se dirigent dans tous les sens. Ces observations s'accordent avec celles des bolides qu'on a vus aussi à la hauteur de cinq, dix et d'un plus grand nombre de milles d'élévation.

(*) M. *Lorhmann* publie en ce moment un atlas fort étendu des cartes de la lune, dressées d'après ses propres observations : l'ouvrage entier doit se composer de 4 vol. in-4.° dont le premier a paru : (*Topographie der sichtbaren Mondoberflæche von* Wilhelm. G. Lohrmann, *inspector bei der Kœnigl. Sæchs. Cameral-Vermessung*); chez l'auteur à Dresde, et à Bruxelles, chez le libraire *Francq,* rue de la Puterie, au prix de 24 francs le volume. Chaque année il paraîtra un volume; le premier est en vente. L'introduction est un Traité complet de tout ce que l'on connaît de relatif à la lune; l'auteur y montre qu'il est très-versé dans l'analyse; il discute avec discernement les opinions que l'on a émises sur notre satellite, et réduit à leur juste valeur les prétendues observations qui ont été faites en Allemagne, depuis quelque temps. L'exécution typographique de cet important ouvrage, mérite également les plus grands éloges. L'auteur a fait expressément le voyage de Paris, pour prendre connaissance des cartes de *Cassini* et de la *Hire,* qu'il a eu la constance de copier pour faire des rapprochemens avec ses propres observations. Il a eu occasion d'y faire connaître les premiers travaux de sa sélénographie et, comme on nous l'écrit : « Ils ont excité l'admiration de tous les savans de cette capitale ». Le célèbre *Olbers,* dans l'annuaire de *Bode,* en fait le plus grand éloge; il regarde l'atlas de M. *Lohrmann* comme l'ouvrage le plus parfait que l'on ait sur la lune.

(**) Hambourg 1800; et Benzenberg *über bestimmung der geographischen længe durch sternschnuppen Hamburg,* 1802.

D'autres observateurs sont parvenus aux mêmes résultats. Il paraîtrait donc que l'origine des étoiles filantes et des bolides serait commune, et c'est aussi l'opinion du célèbre *Chladni*. Ces météores laissent souvent derrière eux des étincelles ou traînées lumineuses qui n'ont point de vitesse propre. M. *Brandes* parle d'une étoile filante qui, le 23 octobre 1805, se fit remarquer par la longue apparition de sa queue qui se recourba en différens sens et demeura visible pendant plus de cinq minutes; long-temps après, on aperçut même encore une faible lumière. Le célèbre voyageur *Krusenstern* et les physiciens qui l'accompagnaient, virent pendant plus d'une heure la traînée lumineuse qu'un bolide avait laissée derrière lui, le 10 octobre 1803. On ne doit peut-être pas classer parmi ces météores ceux qui se présentent comme des inflammations rapides, et qui sans se mouvoir d'une manière bien marquante, s'éteignent presqu'aussitôt. M. *Brandes* croit devoir les considérer de la même manière que les éclairs. On doit encore distinguer les étoiles filantes qui, avec une lueur vive, ne paraissent pas avoir de diamètre appréciable, et qui sans laisser de traînée lumineuse, ressemblent à des étoiles fixes qui tombent.

M. *Brandes* regrette qu'on n'ait pas plus d'observations sur les étoiles filantes, qui permettraient de prononcer avec plus d'assurance sur la nature de ces météores. Il remarque du reste que ces sortes d'apparitions ont lieu plus fréquemment en hiver, et il assure en avoir vu pendant cette saison, plus de 400 dans une même région du ciel et dans l'espace de quelques heures; tandis qu'on en voyait sans doute plus de 2000 au-dessus de l'horizon. Quelques Physiciens ont regardé le printemps comme la saison la plus favorable aux apparitions des étoiles filantes. M. *Brandes* cite aussi des observations à l'appui de cette assertion.

Les personnes qui voudront bien s'occuper des observations que j'ai indiquées dans le cahier précédent, verront sans doute par ce qui précède, que ces observations peuvent devenir très-utiles pour la Météorologie, et fournir des renseignemens qui manquent généralement encore, de l'aveu des plus habiles physiciens.

A. Q.

STATISTIQUE.

A Monsieur VILLERMÉ, *de l'Académie royale de médecine de Paris, etc.*

MONSIEUR,

J'ai reçu avec infiniment de plaisir l'excellent rapport (*) que vous avez bien voulu m'envoyer. Je me suis empressé de communiquer les importans résultats qu'il contient, à l'Académie de Bruxelles qui les a accueillis avec le plus vif intérêt, et m'a chargé de vous exprimer sa gratitude pour l'exemplaire qui lui était adressé.

Il serait intéressant de chercher, comme vous me le dites Monsieur, si les divers quartiers de Bruxelles offrent pour la fortune de la grande masse des habitans, des différences aussi tranchées que plusieurs arrondissemens de Paris. Je me propose de m'occuper de cette recherche, si toutefois la disposition des registres de l'état-civil de Bruxelles, me le permet; il me sera bien agréable alors de vous faire connaître mes résultats; en attendant, j'aurai l'honneur de vous soumettre l'extrait de recherches statistiques qui ont été faites dans ce royaume, et qui pour la plupart se trouvent consignées dans un annuaire fort intéressant (**) rédigé par M. *Lobatto*, et publié par ordre de notre gouvernement.

Je ne puis vous offrir le rapport de la mortalité à la population dans les divers arrondissemens de Bruxelles, mais je le ferai du moins pour les diverses provinces de notre royaume; j'y joindrai aussi le rap-

---

(*) Rapport fait par M. *Villermé*, et lu à l'Académie royale de méd. au nom de la commission de Statistique, sur une série de tableaux relatifs à la population de Paris (voyez la *Corresp. math.* vol. I, page 220).

(**) Voyez la *Corresp. math.* tom. II, page 126.

port des naissances à la population, ainsi que celui des naissances masculines aux naissances féminines. Il ne sera peut-être pas hors de propos de faire entrer encore dans ce tableau, le rapport des mariages à la population dans les mêmes provinces, afin de pouvoir embrasser tous ces résultats d'un même coup-d'œil. J'ai déjà eu l'honneur de communiquer à M. le baron *Fourier*, votre illustre collègue, plusieurs de ces résultats; mais je les considérerai ici sous un autre point de vue, en les rapportant autant que possible à vos propres recherches.

PROVINCES.	RAPPORTS			
	De la pop. à la mortalité.	De la pop. aux naiss.	De la pop. aux mariag.	Des naissaus. fémin. aux naiss. masc.
Zélande.......	31,4	20,7	113,7	0,960
Nord Hollande.	34,5	23,2	104,4	0,956
Sud Hollande..	35,0	23,9	113,3	0,959
Utrecht.......	36,3	24,3	118,2	0,939
Brabant mérid.	38,2	26,1	142,2	0,970
Flandre occ...	40,7	27,5	137,7	0,930
Overyssel.....	43,5	26,5	121,9	0,937
Flandre or....	44,8	28,4	165,3	0,946
Frise.........	46,1	27,1	128,7	0,944
Liège.........	46,2	28,9	154,1	0,942
Limbourg......	47,5	29,2	90,3	0,956
Anvers	48,8	30,7	142,9	0,960
Groningue	49,3	28,9	149,3	0,898
Hainaut	51,1	27,4	136,5	0,921
Brabant sept...	51,4	29,2	150,0	0,974
Gueldre.......	53,7	27,6	131,1	0,952
Luxembourg...	53,8	27,9	149,9	0,967
Drente	55,0	27,8	130,3	0,895
Namur.........	57,9	29,8	150,9	0,907
Moyennes.	43,8	27,0	132,4	0,947

Sans infirmer en rien les importantes conclusions que vous avez déduites des recherches de M. *Villot,* ce tableau nous apprend que l'aisance plus ou moins grande des particuliers, n'a pas influé d'une manière sensible sur la mortalité dans les différentes parties de notre royaume. On ne peut cependant nier que l'aisance ainsi que la propreté ne doivent produire des effets salutaires, et les résultats que vous avez obtenus sont trop décisifs, pour ne pas mettre cette vérité hors de doute. Mais probablement ces effets disparaissent en partie, quand on observe sur une grande étendue de pays où d'autres causes dépendantes des localités et de la manière de vivre des individus, exercent une influence plus considérable. On peut ranger parmi les provinces les plus riches de notre royaume, les deux Hollandes, les deux Flandres, le Brabant méridional; et, parmi celles qui le sont le moins, le Luxembourg et le Namurois. Cependant il est remarquable que ce soit justement dans ces dernières provinces que la mortalité s'est trouvée être la moins grande : il est vrai que dans le Luxembourg, le peuple sans être généralement riche, est pourtant loin de se trouver dans un état d'indigence. . . . . . .

Parmi ces causes de mortalité qui paraissent avoir une influence marquée dans notre pays, je crois pouvoir assigner l'inégalité de population, et surtout l'humidité plus ou moins grande dépendante de l'abaissement du terrain, ainsi que les variations continuelles de température qu'on éprouve dans le voisinage de la mer. Il suffit en effet de jeter un coup-d'œil sur le tableau précédent, pour reconnaître que les provinces les plus populeuses sont les plus exposées à la mortalité; ces provinces sont aussi pour la plupart les plus voisines de la mer; le peuple a dû sentir plus fortement qu'ailleurs le besoin de la propreté, dans l'intérêt même de sa conservation. Le Luxembourg et la province de Namur, au contraire, offrent les points les plus élevés du royaume, et ce sont les parties les moins habitées; aussi la mortalité y est moins forte que partout ailleurs. . . . . .

Je crains, d'après ces discordances, d'émettre une opinion : si cependant j'osais hasarder quelques conjectures, je croirais volontiers que lorsqu'il s'agit d'un royaume, les résultats obtenus pour une ville ne deviennent plus applicables, et que l'on doit alors nécessairement tenir compte de la disposition des lieux, des circonstances météorologiques et de la grandeur de la population sur un terrain donné;

en ayant aussi égard au plus ou moins de propreté et d'aisance des particuliers. Les premières causes deviendraient à-peu-près négligeables, quand il s'agirait d'un espace circonscrit, et les dernières seules produiraient des effets bien appréciables, comme vous l'avez si bien montré pour Paris.

Je trouve, Monsieur, que, dans votre excellent rapport, vous avancez *relativement aux naissances*, qu'elles sont proportionnellement les plus nombreuses dans les arrondissemens où la mortalité est très-forte : cette observation s'accorde parfaitement avec ce que nous indique le tableau précédent; elle se vérifie même pendant les différens mois de l'année, comme je l'ai fait voir dans mon mémoire sur la mortalité à Bruxelles (*) et comme M. *Lobatto* l'a vérifié depuis dans cinq des principales villes de ce royaume (Amsterdam, Gand, Anvers, Rotterdam et la Haye). Ces résultats sont peut-être assez curieux pour mériter votre attention; je les placerai ici avec ceux que j'ai obtenus pour Bruxelles. Je ne ferai qu'indiquer la moyenne valeur des résultats de M. *Lobatto*; on prend pour unité le douzième des naissances et des décès, dans le cours d'une année, et tous les mois sont supposés de 30 jours.

MOIS.	NAISSANCES.		DÉCÈS.	
	Résultats de M. Lobatto.	Bruxelles 18 ans.	Résultats de M. Lobatto.	Bruxelles 18 ans.
Janvier....	1,056	1,040	1,206	1,172
Février....	1,120	1,157	1,109	1,110
Mars.......	1,099	1,099	1,057	1,100
Avril.......	1,053	1,079	1,021	1,068
Mai.........	0,986	0,989	0,950	0,995
Juin........	0,931	0,956	0,902	0,916
Juillet.....	0,909	0,901	0,843	0,806
Août.......	0,925	0,903	0,872	0,844
Septemb..	0,955	0,940	0,923	0,884
Octobre...	0,968	0,949	0,972	0,956
Novembr.	0,989	0,968	1,012	0,975
Décembr.	1,007	1,017	1,129	1,172

(*) III.e vol. des *Mém. de l'Acad. roy. de Brux.*, et *Corresp. math.* I.er vol. pages 16 et 78.

Il serait assez curieux de vérifier ces résultats si singulièrement disposés par rapport aux saisons de l'année, pour d'autres villes plus éloignées, et d'examiner, dans le cas où la loi se maintiendrait pour les naissances et les décès, de quelle manière se déplaceraient les termes *maxima* et *minima* (*). Les oscillations que l'on remarque dans ces tableaux, semblables aux oscillations thermométriques avec lesquelles elles s'accordent, peuvent assez bien être figurées par les ondulations de la courbe qu'on désigne en géométrie sous le nom de *sinusoïde*.

Le rapport moyen général des naissances à la population, que vous donnez pour la France entière, a été de 1817 à 1822 de 1 à 31, près de 32; il est pour le royaume des Pays-Bas, de 1 à 27 : le rapport des décès à la population, est en France de 1 à 39; il est ici de 1 à 44 environ : il résulte de là qu'il naît dans ce royaume proportionnellement plus d'enfans qu'en France et qu'il y meurt moins de personnes. Le rapport des naissances aux décès, est de près de 5 à 3; la population doit donc s'accroître rapidement, et, en effet, il suffit de jeter les yeux sur le tableau suivant pour s'en convaincre. La population était dans le royaume des Pays-Bas, le 1.er janvier,

en 1820.....	5642552
1821.....	5692323
1822.....	5767038
1823.....	5838123
1824.....	5913526
1825.....	5992666

Elle ne fait qu'augmenter chaque jour de la manière la plus rapide. Pour en donner un exemple, nous allons citer le mouvement de l'état-civil pendant l'année 1825, pour les principales villes du royaume.

(*) Dans les *Recherches statistiques* sur la ville de Paris, publiées par les ordres de M. le comte *de Chabrol*, on trouve des tableaux semblables aux nôtres pour lesquels les termes *maxima* et *minima*, se présentent aux mêmes époques; seulement les résultats ne croissent pas et ne décroissent pas d'une manière continue.

	NAISSANCES.	DÉCÈS.	RAPPORT des décès aux naissances.
Amsterdam..	7352	6302	0,8572
Bruxelles......	3763	3146	0,8360
Rotterdam....	2767	2146	0,7756
Gand...........	2820	1976	0,7007
La Haye......	1819	1344	0,7389
Bruges.........	1415	1172	0,8283
Leyde..........	1283	1215	0,9470
Groningue...	1103	860	0,7797
Utrecht........	1647	1161	0,7049
Harlem........	819	539	0,6581
Dordrecht....	719	444	0,6173
Mons...........	809	672	0,8307
Malines........	794	606	0,7658
Leuwarde....	701	453	0,6462
Delft............	584	390	0,6673
Nimègue......	559	334	0,5973
		Moyenne valeur	0,7469

Ce rapport pour les villes, est un peu moins grand que pour le royaume entier, celui-ci étant de 27 à 43,8 ou de 1 à 0,6164. On pourra voir par le tableau suivant quelle a été la valeur de l'accroissement de la population dans les différentes provinces pendant les années 1820 — 21 — 22 — 23 et 24.

PROVINCES.	POPULATION. en 1820.	en 1825.	RAPPORT de L'ACCR.
Nord Hollande..	376188	391187	0,040
Flandre-Orient..	651892	685303	0,051
Limbourg......	305151	321247	0,053
Anvers.........	307941	325147	0,056
Zélande........	122859	129715	0,056
Nord Brabant...	306053	324071	0,059
Namur.........	178126	189189	0,062
Liége..........	313023	333318	0,065
Utrecht........	110239	117743	0,068
Sud Brabant....	453240	483858	0,068
Gueldre........	264088	282272	0,069
Sud Hollande....	406599	435167	0,070
Overyssel.......	150330	160991	0,071
Flandre-Occid...	536289	562414	0,073
Hainaut........	509192	546245	0,073
Groningue......	144754	156093	0,078
Luxembourg....	270407	292155	0,080
Frise...........	186637	202687	0,086
Drenthe........	49544	53868	0,087
	5642552	5992666	moy. 0,067

De ces résultats nous pouvons conclure que la population est croissante dans toute l'étendue de la Belgique, et que la valeur moyenne de cet accroissement a été de $\frac{67}{1000}$ de la population dans l'espace de 5 ans, ou de $\frac{1}{75}$ environ par an.

Dans le royaume des Pays-Bas, le rapport moyen annuel des mariages à la population, est de 1 à 132 environ; en France, il est de 1 à 141; et à Paris, de 1 à 108, d'après vos calculs. Il est à remarquer qu'il existe chez nous, à cet égard, une distinction à faire entre les provinces catholiques et les provinces protestantes : dans les premières, le rapport est d'environ 1 à 148, et dans les secondes, il est de 1 à

123. Cette disproportion est assez marquante pour qu'on doive en tenir compte.

Le rapport entre les naissances masculines et les naissances féminines, qui s'observe toujours si constamment, quoiqu'on en ignore encore la vraie cause, se trouve être dans sa valeur moyenne pour le royaume, à-peu-près comme on l'avait trouvé pour l'Angleterre, c'est-à-dire de 1000 à 947 : en France, il est de 1000 à 938; dans le royaume de Naples, de 1000 à 956; et pour Paris, comme il résulte de vos calculs, il est à-peu-près comme pour la France entière.

Il serait à désirer que l'on commençât à s'occuper sérieusement dans les différens pays, de recherches statistiques qui deviennent si intéressantes et si utiles, quand elles sont discutées avec discernement et basées sur un nombre suffisant d'observations. L'administration de Paris a donné à cet égard un bien bel exemple à suivre, et elle a garanti la solidité du monument qu'elle érige aux sciences, en appelant à sa construction des savans du premier mérite (*). Notre gouvernement qui ne laisse échapper aucune occasion d'établir des institutions utiles, s'occupe également de réunir des documens sur la Statistique. Plusieurs savans de leur côté s'occupent isolément de recherches sur la mortalité : quelques-uns, d'après mon invitation, ont bien voulu entreprendre la construction de tables de mortalité pour des villes importantes de ce royaume. Il me sera bien agréable par la suite de pouvoir vous faire parvenir leurs résultats, en y joignant ceux que j'aurai pu avoir pour les arrondissemens de la ville de Bruxelles (**).

Recevez, je vous prie, Monsieur, etc. A. Q.

(*) Nous citerons ici les expressions d'un savant dont le nom fait autorité en pareille matière, de M. le baron *Fourier* : « Les sciences statistiques ne feront de véritables progrès, que lorsqu'elles seront confiées à ceux qui ont approfondi les théories mathématiques ». Cependant pour quelques écoles, la Statistique est encore une science stérile qui se réduit à apprendre ce que les Babiloniens ou les Carthaginois consommaient de bœufs ou de moutons, et quelle était la population que renfermait la fameuse Thèbes aux cent portes.

(**) Les incendies se multiplient d'une manière effrayante dans ce royaume; il serait peut-être intéressant de chercher quel est annuellement le rapport du nombre des maisons incendiées à celles que renferme le pays, et d'examiner si ce rapport varie d'une manière sensible. On pourrait certainement en déduire des résultats

d'une utilité générale. Il serait aussi à désirer qu'on marquât soigneusement le mouvement de nos ports de mer, et qu'on connut exactement le nombre des vaisseaux indigènes qui en sortent et qui y entrent : ce serait autant de documens qui deviendraient utiles par la suite et qui pourraient jeter quelque jour sur les opérations des sociétés d'assurances. Dans l'intérêt de l'humanité, il serait encore bon de faire des recherches exactes sur tout ce qui concerne les enfans naturels et les enfans trouvés, ainsi que sur l'état des prisons dans les diverses provinces.

ADDITION.

J'ajoute ici quelques nouveaux renseignemens sur les naissances, que je viens de recevoir de Tournai : ils me sont adressés par M. *Lemaire,* qui vient d'être nommé Prof. extr. à l'Université de Gand. « Voici mes recherches sur les nais-
» sances de 20 années pendant lesquelles les registres de l'état-civil ont été
» soigneusement tenus; la première est 1806 et la dernière 1825; j'ai eu égard
» comme vous à l'inégalité des mois et j'ai représenté par 1 le nombre moyen des
» naissances par mois : il y a un accord frappant entre les résultats que nous avons
» obtenus pour plusieurs mois, mais nous différons sur un point très-intéressant,
» savoir : les époques du *maximum* et du *minimum*. Je vous enverrai bientôt les
» résultats des décès. »

Mois.	*Résultats.*	*Mois.*	*Résultats.*
Janvier......	1,0408	Juillet.......	0,9272
Février......	1,1192	Août	0,9259
Mars........	1,0807	Septembre....	0,8589
Avril........	1,1303	Octobre	0,9292
Mai.........	1,1140	Novembre ...	0,9305
Juin	0,9651	Décembre.....	0,9703

« Il est remarquable que le terme *maximum* est au terme *minimum*, à-peu-
» près comme 5 est à 4, comme vous l'avez trouvé. »

Il m'a été adressé aussi de Leyde une lettre de M. *Van Undevrock,* contenant quelques remarques obligeantes dont je remercie l'auteur. L'observation que j'avais déjà eu lieu de faire moi-même, que le grand nombre des naissances au mois de février, pouvait provenir de celui des mariages après l'hiver, et donner lieu par suite à une mortalité plus grande à la même époque, a été l'objet de quelques recherches que j'ai consignées dans mon Mém. sur la mortalité.

A. Q.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Goettingische gelehrte Anzeigen, annonces littéraires de Goettingue, n.° 203, 19 décembre 1825.

La Société royale des sciences de Goettingue, a reçu de la part de M. *Erchinger*, à Thuningen (royaume de Wurtemberg), un petit mémoire traitant de la construction géométrique du polygone régulier de dix-sept côtés. La théorie générale des polygones réguliers a, comme on sait, reçu une nouvelle forme et de nouveaux développemens, depuis qu'elle a été rattachée et liée intimément à la haute arithmétique (*). Une de ses parties, quoique peu étendue par rapport

(*) En désignant par P la circonférence du cercle, M. *Gauss* a trouvé (*Disq. Arith.*, Leipsick, année 1801, sect. VII, n.° 365).

$$\cos. \frac{P}{17} = -\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\sqrt{17} + \tfrac{1}{16}\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{[(17+3\sqrt{17}) - \sqrt{(34-2\sqrt{17})} - 2\sqrt{34+2\sqrt{17}})]}$$

Il observe que les cosinus des multiples de cet angle, ont une forme semblable et que les sinus ont un radical de plus. Il y a certainement bien lieu de s'étonner, dit ce Géomètre, que la divisibilité du cercle, en 3 et 5 parties, ayant été connue dès le temps d'*Euclide*, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de deux mille ans. Et cependant on prouve facilement que si un nombre premier est de la forme $2^n + 1$, ce nombre ne peut avoir d'autres diviseurs que 2; en sorte qu'on peut inscrire dans le cercle un polygone régulier de $2^n + 1$ côtés, n étant un nombre entier, et $2^n + 1$ un nombre premier. Dans un rapport fait à l'Institut de France, M. *Legendre* a donné la démonstration de cette proposition

au reste, est la *Théorie des polygones* qui peuvent se décrire géométriquement. On savait depuis le temps des Grecs, que le triangle, le pentagone, le polygone de quinze côtés et tous les autres qui naissent de la duplication et réduplication des côtés, ont la propriété annoncée, et l'on croyait, on enseignait même comme une chose positive, que c'étaient là les seuls polygones qui en jouissaient; mais la haute arithmétique a prouvé depuis, qu'on était dans l'erreur. En exposant les véritables principes d'une théorie qui est tout-à-fait générale, elle a fait voir qu'outre les polygones nommés, il en est un nombre infini d'autres encore qui peuvent être décrits géométriquement; celui de dix-sept côtés en est l'expression la plus simple. C'est ici que se montre dans un jour éclatant la supériorité de l'analyse qui embrasse avec la même facilité le cas général et le cas particulier, sur la Géométrie qui doit se restreindre au dernier, et qui en procédant des cas simples aux composés, se trouve embarrassée par une complication toujours croissante, de sorte que, sans un secours étranger, elle n'aurait peut-être pu parvenir même à l'expression la plus proche et la plus simple, celle que nous venons d'indiquer. Il est intéressant et très-désirable cependant, que l'on continue de cultiver également les démonstrations purement géométriques, et que cette science tâche de s'approprier, au moins, une partie du domaine conquis par l'analyse. Personne, à ce que nous sachions, n'avait encore écrit sur la construction géométrique du polygone à dix-sept côtés, excepté M. *Pauker*, dans un Traité inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Courlande*, et dans son *Exposé de la Géométrie*. La solution de M. *Erchinger*, différente de la précédente, est conçue dans un esprit

---

pour le cas où l'on a $2^n + 1 = 17$, et depuis il a placé cette analyse à la fin de sa Géométrie. En partant de la relation $2 \sin. \varphi = 2\sqrt{1 - \cos.^2 \varphi}$, et posant $\varphi = \frac{200^o}{17}$, on aura $2 \sin. \varphi = 2 \sin. \left(\frac{200^o}{17}\right)$ qui sera la corde de la 17.me partie de la circonférence, c'est-à-dire, le côté du polygone de 17 côtés : la question se réduit donc à trouver $\cos. \varphi = \cos. \left(\frac{200^o}{17}\right)$; ce à quoi ce Géomètre parvient par la résolution de quatre équations dont chacune ne s'élève qu'au second degré. Cette solution se trouve aussi, à quelques changemens près, à la fin de mon *Traité des Réciproques de la Géométrie*, publié à Paris, en 1810.

J. G. G.

plus purement géométrique encore. La voici en substance. (On pourra facilement décrire soi-même la figure nécessaire qui consiste en une ligne droite sur laquelle sont marqués, ainsi qu'il suit, les points D, B, G, A, I, F, C, E).

Tirez la droite AB que vous prolongerez de part et d'autre jusqu'en C et en D, de manière que $AC \times BC = AD \times BD = 4AB \times AB$; déterminez les points E et G des deux côtés de la longueur prolongée CA, de sorte qu'on ait $AE \times EC = AG \times CG = AB \times AB$; marquez ensuite le point F sur le prolongement de BA, et du côté de A, de manière que $AF \times DF = AB \times AB$; divisez AE en I, de sorte que $AI \times EI = AB \times AF$; par conséquent AI sera le segment le plus petit et EI le plus grand de AE; décrivez un triangle dont deux côtés soient respectivement $= AB$ et le troisième $= AI$: circonscrivez à ce triangle un cercle, et AI sera le côté demandé du polygone régulier de dix-sept côtés, inscrit dans le cercle.

Si l'on examine cette construction d'après la théorie générale du polygone de dix-sept côtés, proposée comme exemple dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 354, on s'apercevra facilement qu'elle n'est dans le fait, qu'une version en langage géométrique des équations que nous fait trouver l'application de la théorie générale. Les distances des points C, D, E, F, G, I au point A, ne sont autre chose que les quantités désignées dans le livre cité par (8.1), (8.3), (4.1), (4.3), (4.9), (2.1); les signes positif et négatif étant exprimés par la position (des points), et la distance du point B au point A, prise dans le même sens, étant $= -1$. Mais ce qui fait le mérite particulier du mémoire de M. *Erchinger*, n'est pas tant d'avoir exécuté la construction elle-même pour laquelle l'analyse avait déjà tracé le chemin le plus court, que de l'avoir prouvée par une démonstration purement géométrique. Cette démonstration est faite avec un si grand et si louable soin d'éviter tout ce qui n'appartient pas aux élémens purs (de géométrie), qu'elle fait grand honneur à son auteur, et qu'elle nous inspire le vœu sincère qu'un talent aussi distingué pour les mathématiques, puisse trouver toute l'attention et tout l'encouragement qu'il mérite.

(*Art. communiqué.*)

Académie Royale des Sciences et Lettres de Bruxelles.

Séance du 6 *mars.* — M. le secrétaire donne lecture d'une lettre de S. E. le ministre de l'intérieur, qui contient la confirmation royale de la nomination de M. *Van Ewyck,* administrateur-général de l'instruction, comme membre honoraire de l'Académie. M. *Dewez* a encore communiqué une lettre de M. *Moreau de Jonnès,* sur divers points scientifiques; une autre de M. *Wittenbach,* professeur à l'Athénée de Trèves, sur les antiquités de cette dernière ville, et une quatrième de M. *Carena,* qui annonce l'envoi du 29.e vol. des *Mémoires de Turin.* L'Académie s'est occupée ensuite des mémoires envoyés au concours de 1826.

Séances des 8 *et* 29 *avril.* — L'Académie continue à s'occuper des mémoires envoyés au concours; M. *Dejonghe,* archiviste à La Haye, est nommé membre en remplacement de M. *Devillenfagne,* décédé. M. *Quetelet* a donné communication à l'Académie d'une lettre et d'un rapport de M. *Villermé,* sur la mortalité dans les différens arrondissemens de Paris (*), ainsi que d'une notice sur la nouvelle comète périodique observée et calculée par M. *Gambart,* de Marseille (**) : il a aussi présenté un mémoire de M. *Hachette,* sur un problême de Géométrie à trois dimensions (***), lequel sera inséré dans les Recueils de l'Académie. M. *Fourier,* l'un des secrétaires perpétuels de l'Académie Royale des Sciences de Paris, a été nommé membre ordinaire étranger.

Dans ses séances des 8 et 9 mai, l'Académie, après avoir entendu les rapports des commissaires pour examiner les réponses aux questions proposées, a décerné : 1.° une médaille d'or à M. *Belpaire,* notaire à Ostende, pour sa réponse à la question : *Quels sont les changemens que la côte d'Anvers à Boulogne, a subis tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, depuis César jusqu'à nos jours ? Quelles sont les causes de ces changemens, provenant tant des effets de la*

(*) Il est question de ce rapport page 220 du vol. précédent de la *Corresp.*

(**) Voyez le cahier précédent page 130 et celui-ci page 170.

(***) On en trouve un extrait dans ce numéro, page 145.

nature que de ceux de l'art, et quelles sont, à-peu-près, les époques auxquelles ils ont eu lieu? 2.° une médaille d'argent au mémoire sur la question : *Quels sont les genres et les degrés de fermentation que subissent successivement les différentes espèces de fumier animal? Quels sont les procedés pour retarder ou accélérer ces fermentations? Par quels caractères peut-on les distinguer? Quelles sont les époques de fermentation où ces différentes espèces de fumier peuvent être employées avec le plus d'avantage comme engrais, eu égard à la nature des divers terrains?* L'auteur est M. *Hensmans*, de Louvain. 3.° Une médaille d'argent à M. *Timmermans*, professeur de Mathématiques spéciales au Collége Royal de Gand, pour la solution de la question : *Assigner la forme et toutes les circonstances du mouvement d'une bulle d'air qui s'élève dans un liquide dont la densité est supposée constante.* Enfin l'Académie a proposé les questions suivantes :

Classe des sciences, pour 1827.

1.° Quelle est la théorie qui explique de la manière la plus satisfaisante les phénomènes divers que présente l'aiguille aimantée?

2.° Assigner la forme et toutes les circonstances du mouvement d'une bulle d'air, de grandeur finie, qui s'élève dans un liquide dont la densité est supposée uniforme.

3.° Quelle relation doit-il y avoir entre dix points de l'espace, pour que ces dix points appartiennent à une surface du second ordre, ou entre dix plans pour que ces dix plans soient tangens à une même surface de cet ordre?

4.° On demande 1.° d'examiner, d'une manière approfondie, les différentes espèces de sociétés d'assurance sur la vie; 2.° d'établir, d'après des principes mathématiques, quelle est celle qui présente à la fois le plus d'avantages aux assurés et aux assureurs.

5.° Déterminer toutes les circonstances du mouvement infiniment petit d'un système quelconque linéaire, flexible, élastique ou non, autour de sa position d'équilibre, en ayant égard à la résistance d'un fluide élastique ambiant.

Pour 1828. — 6.° On suppose que chaque aîle d'un moulin mu par la force du vent, est engendrée par une ligne droite mobile qui s'appuie toujours d'une part à angles droits sur une droite fixe donnée de position, et de l'autre sur une courbe plane dont le plan est paral-

lèle à la droite fixe. Quelle doit être la courbe directrice pour que l'impulsion du courant d'air sur les aîles du moulin, produise le *maximum* d'effet?

LES ÉDITEURS.

— L'*Institut Royal des Pays-Bas* vient de faire paraître le *procès-verbal de la* 18.e *réunion générale* qui a eu lieu les 29 et 31 août 1825. On y trouve un rapport du président sur ce qui s'est passé d'intéressant depuis la dernière réunion; un rapport du secrétaire sur les travaux des différentes classes durant la même époque, et plusieurs autres rapports sur les sciences, les beaux-arts, les lettres et sur l'organisation intérieure de ce corps savant.

L'Institut a fait paraître en même temps, mais seulement en faveur des membres, *un rapport de la cinquième réunion publique de la première classe* (celle des sciences), qui a eu lieu le 30 août 1825. Ce recueil n'est pas moins intéressant que le précédent : il contient le discours du président M. *J. P. Vandecappelle*, et un rapport étendu du secrétaire, M. *Vrolick*, dans lequel il est rendu compte des travaux de la première classe. M. *Ekama* que la mort vient d'enlever aux sciences, a prononcé un discours sur la *force d'attraction*. (Voyez page 190, la notice nécrologique de ce savant.)

A. Q.

Transactions de la Société de Philadelphie; 2.e *vol. de la nouvelle série*. Philadelphie, chez A. SMALL, 1825.

Ce volume renferme seize mémoires différens, traitant presque tous de sujets d'histoire naturelle. Deux ont pour objet de donner des renseignemens météorologiques; un autre concerne la détermination de la côte des Etas-Unis. Parmi ces différens mémoires un seul appartient aux mathématiques, il est de M. *Eug. Nulty*, et traite de la solution d'un problême général sur le pendule simple; c'est celui où le mouvement de projection a une direction oblique à celle qu'aurait le pendule, en obéissant seulement aux lois de la gravité. Comme

la série que j'ai trouvée en résolvant le problème, dit l'auteur, n'a point été donnée dans les derniers écrits sur la Mécanique, j'ai cru que mes recherches mériteraient quelqu'attention (*).

A. Q.

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin, 1825. De l'Imprimerie Royale.

On trouve dans ce nouveau volume qui est le 29.ᵉ de la Collection, un grand nombre de recherches sur l'histoire naturelle et plusieurs mémoires d'archéologie. Parmi ceux qui peuvent intéresser nos lecteurs, nous avons remarqué particulièrement un écrit du comte *Prosper Balbo*, sur le *mètre sexagésimal*, ancienne mesure égyptienne, actuellement en usage en Piémont; ainsi que des observations sur la perspective des anciens, par l'architecte *Randoni*.

A. Q.

Mécanique des ouvriers, artisans et artistes, traduit de l'Anglais, sur la 12.ᵉ *édition, par M.* Bulos, 2 vol. in-12. Chez P. J. Demat, 1825, à Bruxelles.

Cet ouvrage, traduit de l'anglais, renferme des notions claires sur la Mécanique et une foule de données précieuses qui sont le fruit d'une longue expérience : les résultats y sont dégagés de toute espèce de calcul et mis en avant sous forme de préceptes. Cette espèce d'empirisme peut ne pas satisfaire un lecteur habitué à trouver dans les ouvrages français et nationaux, la rigueur mathématique rarement sacrifiée à des approximations indiquées par l'usage; mais les Anglais peuvent citer à l'appui de leur mode d'enseignement, les résultats

---

(*) Voyez tome 2 des mémoires couron. de l'Académie de Brux., où se trouve un mémoire de M. *Pirard*, sur le pendule spiral ou conique.

surprenans auxquels leurs mécaniciens sont parvenus. Nous sommes loin d'accorder la préférence à un empirisme exclusif; mais nous doutons que la plupart de nos Cours de mécanique, ceux mêmes de M. *Dupin*, qui sont des modèles à suivre pour la théorie, soient suffisamment à la portée des artisans peu faits à ce mode d'instruction.

A. Q.

*** Nous croyons convenable de faire connaître à ceux de nos lecteurs qui aiment la belle géométrie, un *Mémoire sur les lignes du second ordre, faisant suite aux recherches publiées dans les journaux de l'Ecole Royale Polytechnique*, par M. *Brianchon*, ancien élève de cette école et capitaine d'artillerie.

L'Histoire de la Géométrie de la règle, dit l'auteur, est liée à celle des lignes harmoniques, et, à cette occasion, il donne une liste fort étendue des ouvrages tant anciens que modernes, à consulter sur ce mode de division des droites : on y trouve entre autres, les noms de *Grégoire de S.t-Vincent* et de *Schooten*. Cet intéressant écrit de 67 pages in-8.°, avec quatre planches, a été publié à Paris, en 1817, chez le libraire *Bachelier*.

J. G. G.

Cours de Géométrie élémentaire, par A. J. H. VINCENT, *ancien élève de l'Ecole normale, licencié-ès-sciences, professeur de Mathématiques spéciales dans l'Académie de Paris* (*Collége Royal de Rheims*) [*]. Un vol. in-8.°, avec planches lithographiées.

De toutes les parties des Mathématiques, dit l'éditeur, la Géométrie élémentaire est sans doute celle qui a le moins participé au mouvement progressif de la science. Serait-ce à cause du peu d'intérêt

(*) M. *Vincent* est connu par des recherches consignées dans les *Annales math.* de Nîmes.



qu'elle présente? non, car elle est au contraire regardée comme une des branches les plus importantes des sciences exactes. Mais par une sorte de contradiction qui cependant n'est qu'apparente, elle a dû avancer moins rapidement, précisément parce qu'elle était la plus ancienne. C'est en effet la seule sur laquelle les anciens nous aient laissé un cours de doctrine à-peu-près complet; et tandis que l'on travaillait à créer de nouvelles branches et à les perfectionner, on se contentait (et c'était à la vérité ce que l'on pouvait faire de mieux alors) d'expliquer et de commenter *Euclide*.

Les élémens d'*Euclide* ont donc régné pendant long-temps dans les écoles; et rien sans doute n'a tant retardé les progrès de l'enseignement élémentaire de la Géométrie, que cette espèce de culte qu'on leur rendait et qu'on leur rend encore dans plusieurs Universités célèbres. En France, heureusement, cette route est depuis long-temps abandonnée : nous avons plusieurs bons Traités de Géométrie; et si, dans quelques points, on aperçoit encore des traces de l'influence dont nous venons de parler, dans beaucoup d'autres aussi, on reconnaît une amélioration bien marquée, et une tendance à faire mieux encore.

Pour achever d'élever l'enseignement de la Géométrie élémentaire à la hauteur qu'il peut atteindre, il ne s'agit donc plus que de suivre les traces des écrivains célèbres dont les ouvrages sont entre les mains de notre jeunesse, et de s'avancer, sous leurs auspices, un peu plus loin qu'eux dans la carrière.

Le Cours de Géométrie élémentaire en question est divisé en cinq livres, subdivisés en chapitres et en sections.

L'un des points les plus importans qui distingueront ce Cours de Géométrie, est la théorie des *figures semblables*. Une heureuse modification apportée par l'auteur aux définitions ordinaires, lui a permis de simplifier tellement ses démonstrations, que l'on pourrait presque se dispenser de figures pour développer toute la théorie. Les définitions qu'il a adoptées, ont d'ailleurs l'avantage de ne contenir rien de superflu, et d'être indépendantes de la position des figures ainsi que de la considération des angles, conditions qui, comme on le sait, ne sont pas remplies dans les définitions que l'on a données ou proposées jusqu'à présent. Les figures inversement semblables ne sont pas oubliées dans ce chapitre.

Une autre théorie, à-peu-près entièrement nouvelle par l'extension que l'auteur lui a donnée, et bien importante, tant pour ses applications dans les arts que parce qu'elle forme une introduction indispensable à la Géométrie des courbes et des surfaces, est celle de la *symétrie*. L'auteur traite complètement de la symétrie de *forme* et de la symétrie de *position* par rapport à un *centre*, par rapport à un *axe*, et par rapport à un *plan*. Au reste, cette théorie n'étant pas essentielle, les démonstrations y sont moins développées : elle pourra être réservée comme exercice pour les élèves les plus forts; on l'a, pour cette raison, imprimée en petit-texte. La même observation est applicable au chapitre des polyèdres réguliers, ainsi qu'à un assez grand nombre de théorèmes et de réciproques qui servent de complément aux diverses théories, et que l'auteur a indiqués sans démonstration, parce qu'ils ne sont pas indispensables.

La Géométrie des lignes et des plans considérés dans l'espace, qui compose le troisième livre, est traitée d'une manière que nous croyons neuve et tout à fait complète. Les théories relatives aux droites et aux plans parallèles ou perpendiculaires entre eux, celle des angles trièdres et polyèdres, celle des polyèdres, sont exposées d'une manière qui paraît ne devoir rien laisser à désirer; ce livre forme une utile introduction à la Géométrie descriptive. Quant à la théorie de la mesure des volumes, elle se trouve beaucoup simplifiée par la démonstration de M. *Querret* et par d'autres modifications apportées par l'auteur à la manière de décomposer les solides.

On remarquera dans le quatrième livre un chapitre préliminaire destiné à donner sur les diverses espèces de surfaces, des notions que l'on rejette ordinairement dans la Géométrie descriptive. Ces notions étant d'une application continuelle dans une foule d'arts les plus usuels, l'auteur a pensé avec raison qu'elles faisaient essentiellement partie de la Géométrie élémentaire. On sent d'ailleurs combien le développement du cône et du cylindre simplifie la détermination de l'aire de ces deux surfaces.

Ceci nous conduit à parler de la méthode adoptée par l'auteur pour le passage du commensurable à l'incommensurable : essayons d'en donner une idée par un exemple. Qu'il s'agisse de trouver la formule de l'aire du cercle : ayant fait voir precédemment que le cercle est la limite des polygones réguliers inscrits et circonscrits dont les

côtés deviennent de plus en plus petits, on conclut par analogie que l'aire du cercle doit avoir pour mesure, etc., et l'on démontre la proposition par l'absurde. Cette méthode mixte paraît réunir les avantages des deux méthodes ordinaires, sans avoir les inconvéniens qu'on reproche à chacune d'elles prise isolément; elle est naturelle; elle n'a rien de trop analytique ni de trop synthétique; et quant à l'emploi qu'on y fait de l'absurde, il n'est pas inutile d'observer que les démonstrations ordinaires par les limites, ne sont au fond que des démonstrations par l'absurde (*).

J. G. G.

Elémens d'Arithmétique complémentaire, ou Méthode nouvelle par laquelle, à l'aide des complémens arithmétiques, on exécute toutes les opérations de calcul. Nouvelle édition; par M. Berthevin. Un volume in-8.° Prix, 5 fr. pour Paris, et 6 fr. franc de port.

La première édition de cet ouvrage, que S. Ex. le ministre de l'Intérieur avait honorée d'une souscription de trois cents exemplaires, étant presque épuisée, l'auteur s'est rendu aux sollicitations des professeurs les plus distingués pour revoir et compléter son travail.

Jusqu'à lui on avait tiré peu d'utilité des *complémens*; il a conçu l'idée d'en étendre l'usage à toutes les opérations de l'arithmétique; et les moyens neufs et simples qu'il a imaginés, impriment à la plupart une très-grande célérité, en réduisant souvent les plus compliquées à une addition ou à une soustraction.

Quoiqu'elle ne fût guère qu'une esquisse, la première édition a fait sensation, surtout en Angleterre où l'on a promptement saisi

---

(*) Nous observerons cependant que c'est ainsi que nous avons traité la chose dans notre *Traité de Géométrie*.

J. G. G.

les avantages de la nouvelle méthode. L'auteur, fréquemment invité à développer davantage divers résultats qu'il n'avait qu'indiqués, et particulièrement à multiplier les applications à l'arithmétique commerciale, s'est décidé à refondre entièrement son ouvrage, et a fait d'une brochure curieuse un livre vraiment utile.

A. Q.

Notice nécrologique sur M. C. Ekama.

L'Université de Leyde vient d'éprouver une perte très-sensible, par le décès de M. *Corneille Ekama,* Maître-ès-arts, Docteur en philosophie et mathématiques, Professeur dans la faculté des sciences physiques et mathématiques.

Destiné à l'état ecclésiastique, il en remplit les fonctions avec honneur à *Elkerzée* (*île de Schouwen*), jusqu'à l'époque de sa nomination, en 1803, à la chaire de physique et de navigation, à l'Ecole urbaine de *Zirikzee.* Quelques années plus tard, le Prof. *Chaudoir,* s'étant volontairement rétiré de l'enseignement universitaire, à Franeker en Frise, M. *Ekama,* originaire de cette province, succéda à ce savant dans la chaire de logique, métaphysique, physique et astronomie : il entra en fonctions à l'Université de *Franeker,* en 1809, et prononça à cette occasion son discours : *de Frisia ingeniorum mathematicorum imprimis fertili.* Lors de la suppression de cette Université, sous le régime Français, le professeur *Ekama* passa à celle de Leyde, où il fut spécialement chargé du cours d'astronomie. Il s'acquitta de cette tâche jusqu'à l'instant de sa mort, avec ce zèle éclairé et soutenu qui caractérise le vrai savant. En 1822, l'honorable choix de ses collègues, confirmé par le souverain, l'ayant porté à la dignité de Recteur de l'Université, il prononça un discours sur *les progrès des sciences mathématiques et nommément de l'astronomie, à dater de Copernic* (*), discours qui réunit tous les suffrages.

(*) *De insignium, qui in scientia astronomica facti sunt, progressuum fundamentis, a summis in re mathematica et astronomica, viris partim*

Tout y respire la plus profonde vénération pour les grands hommes qui ont porté la plus sublime des sciences humaines à la hauteur où nous la voyons parvenue de nos jours; on y remarque un éloge touchant des célèbres Astronomes *Délambre* et *Van Swinden*, dont M. *Ekama* s'estimait très-heureux de cultiver les liaisons d'amitié et avec lesquels il s'honorait d'être en correspondance scientifique. Portant dans toutes ses relations le caractère le plus sociable, la plus aimable franchise, homme intègre, modeste, rempli d'instruction solide et très-variée, M. *Ekama* s'est fait estimer de tous ceux qui l'ont connu. Paraissant jouir de la plus brillante santé, il est mort à l'âge de 52 ans, d'une maladie causée, ou dont, au moins, le développement s'est aggravé par des travaux trop assidus à l'observatoire astronomique.

Nos sociétés savantes les plus distinguées l'ont agrégé comme membre effectif. Il existe de lui un mémoire ou éloge historique de *Gemma Frisius*, célèbre astronome Hollandais au seizième siècle, et le premier qui trouva les vrais principes pour constater les longitudes en mer (*); ce mémoire est inséré dans le 7.e volume des *Mémoires de l'Institut royal des Pays-Bas*, dont M. *Ekama* était nommé membre depuis 1812. Les publications de la Société de l'*Utilité publique* (*Nut van 't algemeen*) (**), contiennent également *quelques solutions arithmétiques* des problêmes proposés par le respectable et savant *Œneæ* (***). M. *Ekama* fut membre de la commission placée auprès du ministère de la marine pour la rédaction de l'*Annuaire astronomique* (****), ainsi que du Collége des examinateurs pour les aspirans à la marine. Il s'est constamment acquitté de ces fonctions de manière à se concilier l'estime de tous les gens de bien. *Sit ei terra levis!*

Le Professeur Kesteloot.

---

decimo sexto, maxime decimo septimo seculo, jam præcipue jactis (*vid. Annales académiæ Lugd. Bat., vol.* 7.o)

(*) Voyez *Corresp. Math. et Phys.* I.er vol. pag. 342.

(**) *Stukken betreffende het schoolwezen* 6.de *deel.*

(***) On a encore de M. *Ekama*, un discours sur la *force d'attraction*, inséré dans le *Rapport de la* 5.e *réunion publique* de la première classe de l'Institut de Hollande (voyez page 184).

(****) Nous ferons connaître cet intéressant ouvrage dans le cahier suivant.

Questions à résoudre.

1.° Dans l'hyperbole, la portion d'asymptote, interceptée entre deux tangentes quelconques, est divisée en deux segmens égaux par la corde de contact.

2.° Décrire une hyperbole dont on a une asymptote, un point et deux tangentes.

3.° Par un point connu, faire passer une surface du second degré assujettie à toucher un cône du second ordre, dont la ligne de contact est donnée.

4.° Soit *a* un triangle équilatéral servant de base à un tétraèdre, on demande le lieu des sommets du tétraèdre, pour qu'on puisse toujours y inscrire une sphère (voyez la 2.° question du cahier précéd.)

5.° La terre en parcourant annuellement la trajectoite elliptique, a pour enveloppe dans ses positions successives, une surface annulaire dont on demande l'équation.

Le savant éditeur des *Annales de Nimes*, nous observe avec raison, qu'à la *pag.* 66 *du* 2.me *vol. de la Corrresp. Math. et Phys.*, nous avons oublié d'accoler aux noms des Géomètres cités, celui de *Pappus*, premier auteur du problème en question : cette omission, qui pourtant ne procède pas d'ignorance, peut être justifiée pas la circonstance qui a donné lieu à cette note : nous nous adressions à un jeune élève d'Athénée, qui jusqu'ici a plus entendu parler des géomètres modernes que des anciens avec lesquels il fera connaissance plus tard, car c'est toujours des modernes aux anciens, que nous procédons; mais par cette raison, nous ne pouvons nous excuser de n'avoir pas cité l'excellent recueil en question et duquel on peut dire aux géomètres : *nocturna versate manu, versate diurna.* M. *Gergonne* est donc fondé à nous rappeler qu'on a traité les deux mêmes problèmes (Ann. Math., tom. I, pag. 387 et tom. VII, pag. 325), et à faire ressortir l'avantage de ces solutions sur celles des Géomètres que nous avons cités.

J. G. G.



MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Probléme.

Etant données quatre droites telles que la somme de trois quelconques d'entre elles, soit plus grande que la quatrième, construire un quadrilatère inscriptible dont ces droites soient les côtés, sous la restriction que deux d'entre elles, soient assignées comme côtés opposés (*).

Soient A, B, C, D les quatre droites données; A et C, B et D celles qui doivent être les côtés opposés dans le quadrilatère : il y a plusieurs cas à distinguer.

1.° Si les quatre droites sont égales, la solution n'a pas de difficulté, puisque la question se réduit à construire un carré dont une de ces lignes soit le côté.

(*) Cette solution est extraite, à quelques abréviations près, de l'ouvrage ayant pour titre : *Francisci Vietæ opera mathematica, volumen congesta ac recognita, opera atque studio Francisci Schooten, Leydensis matheseos professoris.* Voyez *Adjuncta capitula, cap. I.* Si l'on nous observait que cette solution est connue, nous répondrions que jusqu'ici nous ne l'avons trouvée que dans l'ouvrage cité qui n'est pas entre les mains de ceux auxquels s'adresse la partie élémentaire de la *Correspondance*.



2.° Si $A = C$ et $B = D$; le rectangle construit sur A et B, sera le quadrilatère cherché.

3.° Soient toujours $A = C$, mais $B > D$, PQ étant la différence $B - D$. Voici la construction (*fig.* 46) : on prendra EF égale à la ligne donnée D, puis au point E élevant sur EF la perpendiculaire $EI = \sqrt{A^2 - \frac{1}{4}\overline{PQ}^2}$, on mènera par I la parallèle RS à EF; enfin ayant pris $IK = EF = D$, on portera de I vers R en IG et de K vers S en KH, deux parties égales entre elles, et chacune $= \frac{1}{2}PQ$: joignant GE et HF, le quadrilatère GEFH sera celui qu'on demande. En effet, $EF = D$, $GH = PQ + D = B - D + D = B$: joignant FK, les triangles EIG et FKH rectangles et égaux, donneront

$$FH = EG = \sqrt{\overline{EI}^2 + \frac{1}{4}\overline{PQ}^2} = A.$$

Donc le quadrilatère EGHF est construit avec les côtés donnés, placés suivant la condition énoncée : mais, en vertu de l'égalité des triangles EIG et FKH, la somme des angles opposés G et HFE, H et FEG vaut deux droits : donc (Récip.) (*) le quadrilatère est inscriptible.

4.° Supposons que les droites données soient inégales, et qu'on ait (*fig.* 47) $A > C$ et $B > D$; il ne pourra se présenter que trois cas, suivant qu'on aura $C > D$, $C = D$ et $C < D$: or, la construction restant la même sous ces trois relations, nous n'aurons égard qu'à la première.

On prendra $EF = D$, qu'on prolongera de part et d'autre de ses extrémités; on divisera l'excès PQ de B sur D en deux parties PM et MQ qui soient entre elles dans le rapport $A : C$, et l'on portera MQ de F en I, et PM de E en K, en sorte que $MQ : PM = C : A = FI : EK$; ensuite du point K, comme centre, avec un rayon $KN = A - C$, on décrira une circonférence que l'on coupera en O, de manière que $FO = IE$, ce qui exige que IE soit $> FN$, relation qui a lieu (**);

(*) J'ai publié en 1810 un *Traité des propositions réciproques* de celles qu'a démontrées M. *Le Gendre*, dans sa *Géométrie*. Dans la position des énoncés réciproques, *les données de l'énoncé direct doivent être prises pour inconnues, lorsqu'on passe à l'énoncé inverse et inversement*. Sous ce point de vue, telle directe, n'admet qu'une inverse ; telle autre en comporte plusieurs ; enfin la même inverse peut convenir à plusieurs propositions.

(**) Il s'agit de prouver que $FO = IE > FN$. Remarquons, à cet effet, que

enfin par les points K et O, on mènera une droite sur laquelle on prendra $KV = A$, et, après avoir tiré VR parallèle à OF, on prendra $VL = D$, puis joignant L et I, on aura le quadrilatère cherché VKIL.

En vertu de la construction, $KI = EF + EK + FI = EF + MQ + PM = EF + PQ = D + B - D = B$; $KV = A$, $VL = D$, et je dis que $LI = C$: car menons FS parallèle à KV, joignons SI, et soit R le point de rencontre des droites VS et KI : puisque le rayon KO a été pris égal à $A - C$, et que $KV = A$, on aura $OV = FS = C$. Il reste donc à démontrer que $LI = SF$. Or, par construction

$$PM : MQ = EK : FI = A : C = KV : FS :$$

donc les triangles VEK et SIF sont semblables; donc SI est paral-

---

l'excès PQ de B sur D, est nécessairement moindre que la somme des lignes A et C; car s'il en était autrement, la droite B serait $>$ ou $= A + C + D$, ce qui ne peut être supposé; mais on a

$$PM : MQ = A : C$$

d'où

$$PQ : PM = A + C : A;$$

donc PQ étant $< A + C$, on a $PM < A$. Or, par construction,

$$PM : MQ = EK : FI = A : C;$$

d'où

$$EK - FI : EK = A - C : A$$

et d'un autre côté $KN = A - C$; donc

$$KN = \frac{A}{EK}(EK - FI)$$

conséquemment $KN > EK - FI$, à cause de $A > PM = EK$; d'où l'on tire $KN + FI > EK$, et, en retranchant KN de part et d'autre, $IF > EN$: mais $IE = IF + FE$, $FN = FE + EN$; donc $IE > FN$; donc l'arc décrit du centre F, avec un rayon $FO = IE$, coupera toujours la circonférence.

On peut même assigner un arc dont les deux extrémités soient les limites des intersections de FO avec cette circonférence : d'abord le point N est une de ces limites, puisque l'on a toujours $IE > FN$: en second lieu, si l'on observe que $IE = IF + FE$, $FK = FE + EK$, et que $IF < EK$, on conclura, dans l'un et l'autre cas de la figure, $IE < EK + FE < FK$; donc, si du point F, comme centre, avec FK pour rayon, on décrit l'arc KX, le point X sera la seconde limite cherchée.

lèle à VE, en sorte que

$$RS : RI = SV : IE ;$$

mais $SV = FO = IE$, donc $RS = RI$; et à cause de $SL = SV - LV = SV - D$ et de $IF = IE - FE = IE - D = SV - D$, on a $SL = IF$; donc aussi $RS + SL = RI + IF$, c'est-à-dire, $RL = RF$. De là résulte l'égalité des triangles RSF et RIL qui ont un angle commun R entre $RL = RF$ et $RI = RS$, et qui donnent par conséquent $LI = SF = C$. Donc le quadrilatère VKIL est formé avec les côtés donnés, placés suivant la condition énoncée.

Il reste à démontrer l'inscriptibilité de ce quadrilatère. A cet effet, on se rappellera que les deux triangles SIL et SIF ont les trois côtés égaux chacun à chacun; d'où il résulte que l'angle $SLI = SFI = VKI$; donc la somme des angles opposés VKI et VLI est égale à deux droits : donc (Récip.) le quadrilatère est inscriptible.

J. G. G.

ALGÈBRE.

Question d'intérêts composés; par P. F. Verhulst, *docteur en sciences à l'Université de Gand* (*).

On demande ce que devient au bout de n années, un capital x à r pour 100, lorsqu'à la fin de la 1.re année on retranche du capital augmenté des intérêts, une somme égale à c, ce qui donnera lieu à une différence que l'on placera également à r pour 100, en ajoutant les intérêts au capital, mais dont on retranchera $2c$; et ainsi de suite, en retranchant successivement $3c$, $4c$..... nc, à la fin des 3.me, 4.me..... n.me années.

(*) Cette question s'est présentée à l'occasion d'un arrêté royal qui règle le payement de la *dette différée* par la voie du sort et de 25 en 25 ans.

Solution.

Posons $1 + \frac{r}{100} = i$: le capital x devient après

$$
\begin{array}{ll}
1 \text{ an....} & xi - c = x' \\
2 \text{ ans...} & x'i - 2c = xi^2 - ci - 2c = x'' \\
3 \text{ ans...} & x''i - 3c = xi^3 - ci^2 - 2ci - 3c = x'' \\
n \text{ ans...} & xi^n - c\,[i^{n-1} + 2i^{n-2} + 3i^{n-3} + \dots + (n-2)i^2 + (n-1)i + n]
\end{array}
$$

Or, ayant écrit le polynôme entre parenthèses de la manière suivante :

$$
\left.
\begin{array}{lr}
1.^{re} \dots & i^{n-1} + i^{n-2} + i^{n-3} + \dots + i^2 + i + 1 \\
2.^{e} \dots\dots & + i^{n-2} + i^{n-3} + \dots + i^2 + i + 1 \\
3.^{e} \dots\dots\dots & + i^{n-3} + \dots + i^2 + i + 1 \\
 & + \dots\dots\dots\dots \\
 & + \dots\dots\dots\dots \\
(n-2)^{me} \dots\dots\dots\dots & + i^2 + i + 1 \\
(n-1)^{me} \dots\dots\dots\dots & + i + 1 \\
n^{me} \dots\dots\dots\dots\dots & + 1
\end{array}
\right\} (A)
$$

et on reconnaîtra facilement que

$$
\begin{array}{ll}
\text{la } 1.^{re} \text{ ligne équivaut à} & \frac{i^n - 1}{i - 1} \\
\text{la } 2.^{me} \dots\dots\dots\dots & \frac{i^{n-1} - 1}{i - 1} \\
\text{la } 3.^{me} \dots\dots\dots\dots & \frac{i^{n-2} - 1}{i - 1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\text{la } (n-2)^{me} \dots\dots\dots & \frac{i^3 - 1}{i - 1} \\
\text{la } (n-1)^{me} \dots\dots\dots & \frac{i^2 - 1}{i - 1} \\
\text{la } n^{me} \dots\dots = 1 = & \frac{i - 1}{i - 1}
\end{array}
$$

Faisant la somme, il viendra pour (A) :

$$(A)=\frac{1}{i-1}\left[i^n+i^{n-1}+i^{n-2}+\ldots+i^3+i^2+i-n\right]$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(A)=\frac{1}{i-1}\left[i^n+i^{n-1}+i^{n-2}+\ldots+i^3+i^2+i+1-(n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{i-1}\left[\frac{i^{n+1}-1}{i-1}-(n+1)\right]$$

En nommant y l'inconnue du problême, sa valeur sera

$$y=xi^n-\frac{c}{i-1}\left[\frac{i^{n+1}-1}{i-1}-(n+1)\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

Le calcul peut s'abréger beaucoup, en fesant usage de tables de logarithmes. Si l'on suppose $c=0$, on tombe sur la formule connue $y=xi^n$. Dans ce cas, chacune des quantités y, x, i et n peut être déterminée algébriquement au moyen des trois autres; ce qui n'est possible, dans le cas général, que pour x, y et c. En effet, si l'on regardait comme inconnu le nombre n, on ne pourrait obtenir sa valeur qu'en résolvant une équation transcendante où n se trouverait à la fois en exposant et en coefficient. Si l'inconnue était i, sa valeur dépendrait d'une équation généralement supérieure aux quatre premiers degrés et par conséquent impossible à résoudre tant que toutes les données ne seraient pas exprimées en nombres.

De l'équation (B) résolue par rapport à x, on tire la formule

$$x=\frac{y+\frac{c}{i-1}\left[\frac{i^{n+1}-1}{i-1}-(n+1)\right]}{i^n}$$

qui donne le capital primitif connaissant ce qu'il est devenu au bout de n années : en résolvant la même équation par rapport à c, on trouve

$$c=\frac{(xi^n-y)(i-1)}{\left[\frac{i^{n+1}-1}{i-1}-(n+1)\right]}.$$

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Problème des courriers, par M. MANDERLIER, *candidat en sciences à l'Université de Gand.*

On entend par *mouvement uniforme,* le mouvement en vertu duquel un corps parcourt des espaces égaux, dans des intervalles de temps égaux; en sorte que les espaces sont proportionnels aux temps employés à les parcourir : mais les ordonnées d'une droite passant par l'origine, sont aussi proportionnelles aux abscisses correspondantes; ainsi ces abscisses étant prises pour représenter les temps, les ordonnées représenteront les espaces correspondans, et la vitesse qui n'est que l'espace parcouru pendant l'unité de temps, sera l'ordonnée correspondante à l'abscisse égale à l'unité linéaire, c'est-à-dire, la tangente de l'inclinaison de la droite sur l'axe des abscisses, qui est le coefficient de l'abscisse dans l'équation de la droite.

Nous appellerons ligne de *mouvement d'un mobile,* celle dont les ordonnées sont les espaces parcourus par ce mobile pendant les temps représentés par les abscisses : nous désignerons par les lettres (A), (A′), (A″) etc., placées sur les droites de mouvement, les mobiles dont il s'agit, et par a, a', a'' etc., leurs vitesses respectives.

D'après ces conventions, nous aurons (*fig.* 48).

$$a = \frac{PM}{OP},\ a' = \frac{Mn}{OP} = \frac{PM}{R'P};\ a'' = \frac{PM}{r'P} = \frac{Mm'}{rm'}.$$

Ici l'origine O est celle des temps que nous noterons par t : pour le mobile (A), les espaces et les temps sont nuls à la fois. Quant aux mobiles (A') et (A'') dont les droites de mouvement ont pour équations

$$y = a'x + b',\ y = a''x - b''$$

on aura les temps OR' et Or', en faisant $y = 0$, d'où résulteront

$$OR' = -\frac{b'}{a'},\ Or' = \frac{b''}{a''}$$

ces temps OR' et Or', ainsi que les espaces correspondans OR et Or, sont pour (A'), antérieurs, et pour (A'') postérieurs à $t = 0$. Pour les mobiles (A') et (A'') considérés isolément, R' et r' seraient des origines de temps et d'espaces parcourus. Mais il faut observer que lorsqu'au moyen des équations des droites de mouvement des mobiles (A), (A') et (A''), savoir :

$$y = ax,\ y = a'x + b',\ y = a''x - b''$$

il s'agit de calculer le temps x écoulé jusqu'à leur rencontre en M, ce temps doit être compté de l'origine O des abscisses, et que sous ce point de vue, les espaces parcourus depuis cette époque, sont PM, mM et m'M, et que les espaces antérieurs sont OR et Or.

D'après cela, si l'on veut représenter les positions respectives des mobiles, à l'origine du temps, sur la droite suivant laquelle ils se meuvent effectivement, on les disposera, comme on le voit (*fig.* 49), où M représente le point de rencontre, les distances (A) (A') = OR = Pm, (A) (A'') = Or = Pm'; (A') M = mM, (A) M = PM, (A'') M = m'M, les premiers membres se rapportant à la figure (49) et les seconds à la figure (48).

Dans la position du problème de deux courriers, telle qu'on la trouve dans les élémens d'algèbre, on suppose que le courrier (A'), déjà placé en avant de (A) vers M, part un certain nombre d'heures avant (A); mais on conçoit que cette hypothèse revient à dire qu'il est déjà parvenu en Q, au moment du départ du courrier (A), et que, pour peindre cette circonstance (*fig.* 48), il faut prendre

$R\rho = (A')Q$, et par ρ mener la parallèle $\rho'\rho$ à $R'R$, ce qui déplace le point de rencontre.

La figure (48) montre qu'on a $a'' > a$ et $a > a'$, ce qui s'accorde avec les positions représentées (*fig.* 49).

Considérons quelques positions particulières des droites de mouvement.

1.° Soient les lignes de mouvement OM et R'R (*fig.* 50) : la vitesse a' est négative, ce qui indique que le mobile (A') se meut en sens contraire de (A) dont la vitesse a est positive : ces circonstances sont représentées (*fig.* 51) où le point de rencontre M est placé entre les positions initiales (A) et (A'), le second mobile allant à la rencontre du premier. On pourra supposer à la droite du mouvement de (A), la position plus générale $r'r$, ce qui ne fera que changer la position du lieu primitif de (A) (*fig.* 51). Après le temps OR', les espaces décrits par (A') deviennent négatifs.

2.° La droite du mouvement du mobile (A') (*fig.* 52), peut être une parallèle Pr à l'axe des y, auquel cas, sa vitesse a' est infinie, ainsi que l'espace déjà parcouru, lorsqu'on commence à compter le temps t. On peut supposer que Pr soit une des positions de la droite $P\rho$ qui a tourné de gauche à droite, ou de la droite $P\rho''$ qui à tourné de droite à gauche autour de P : dans la première supposition, l'espace $O\rho$ passe par l'infini positif, et la tangente de l'angle ρPX par l'infini négatif : dans la seconde, l'espace $O\rho'$ passe par l'infini négatif, et la tangente de l'angle $\rho''PX$ par l'infini positif. Ainsi (*fig.* 53), le mobile (A') sera sur la droite du mouvement, à une distance infinie de (A), soit à droite avec une vitesse infinie et négative, soit à gauche et animé d'une vitesse infinie et positive. Dans le premier cas, le point de rencontre M, sera placé entre (A) et (A'), et dans le second au delà de (A), par rapport à (A').

3.° La droite du mouvement de (A'), est parallèle à l'axe des x (*fig.* 54), auquel cas, sa vitesse a' étant nulle, le lieu de (A') (*fig.* 55) est aussi celui du point de rencontre M : pour ce mobile (A'), l'origine du temps, est à une distance infinie à gauche de O, ce qui doit être, puisque cette origine est en même temps celle du mouvement.

4.° L'une des droites de mouvement peut être parallèle à l'axe des x, et l'autre parallèle à celui des y.

5.° L'intervalle qui sépare les deux courriers (A) et (A′) après un temps $Op=t$ ou $O\pi=t'$, est mn ou $\mu\nu$ (*fig.* 56) à des intervalles de temps égaux, avant et après la rencontre, ces distances entre les mobiles sont égales; d'ailleurs elles sont les différences entre les deux ordonnées pour la même abscisse : si donc on pose

$$y=ax+b\,;\,Y=a'x+b'$$

on aura

$$y-Y=nm=(a-a')x+b-b'=(a-a')\left[x+\frac{b-b'}{a-a'}\right]$$

et, pour la rencontre,

$$(a-a')\,x+(b-b')=o,$$

d'où

$$x'=\frac{b-b'}{a'-a},y'=\frac{a'b-b'a}{a'-a};$$

on aura donc

$$mn=(a'-a)\left[-x+\frac{b-b'}{a'-a}\right]=(a'-a)(x'-x).$$

Réponse à la question 2.° proposée vol. II de la Corresp. mathématique et physique, *pag.* 130; *par M.* Groetaers, *élève de l'Athénée de Bruxelles* (*).

Supposons que l'axe des x se confonde avec la droite donnée, et que l'axe des y passe par son milieu; alors l'équation générale de la circonférence mobile sera

$$(x-\alpha)^2+(y-r)^2=r^2.$$

Nommons b la moitié de la droite donnée AC, et menons par le point A (*fig.* 57) une tangente à la circonférence considérée dans une position quelconque; les coordonnées du point A étant $x=-b$ et $y=o$, l'équation de la tangente sera

$$y'=-\frac{(x'-\alpha)}{y'-r}(x'+b),$$

(*) M. *Manderlier* nous a remis une solution de la même question, que nous donnerons dans le cahier suivant.

puisque

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{x'-\alpha}{y'-r};$$

l'équation de la tangente passant par le point $x=b$ et $y=0$, sera $y' = -\frac{(x'-\alpha)}{y'-r}(x'-b)$ qui peut aussi s'obtenir en changeant dans l'équation de la première tangente, b en $-b$; cette remarque nous dispensera de répéter les opérations pour la seconde tangente.

Pour trouver les valeurs des coordonnées du point de tangence en fonction des quantités connues, combinons ensemble l'équation de la circonférence et celle de la tangente.

la première | donne | $y'^2 - 2ry' = -(x'-\alpha)^2.$
la seconde | | $y'^2 - 2ry' = -(x'-\alpha)(x'+b) - ry'.$

De ces équations on tire successivement :

$$(x'-\alpha) = -\frac{ry'}{(b+\alpha)}$$

$$y'^2 - 2ry' = -\frac{r^2y'^2}{(b+\alpha)^2}$$

d'où

$$[r^2 + (b+\alpha)^2]\,y' = 2r\,(b+\alpha)^2$$

enfin

$$y' = \frac{2r\,(b+\alpha)^2}{r^2+(b+\alpha)^2}:$$

en substituant au lieu de y' sa valeur dans l'expression

$$x'-\alpha = -\frac{ry'}{(b+\alpha)}$$

il vient

$$x'-\alpha = -\frac{2r^2\,(b+\alpha)^2}{r^2+(b+\alpha)^2}$$

de plus

$$x'+b = b+\alpha - \frac{2r^2\,(b+\alpha)}{r^2+(b+\alpha)^2} = \frac{(b+\alpha)^3 - r^2\,(b+\alpha)}{r^2+(b+\alpha)^2}$$

Cela posé, nommons Y' et X' les coordonnées d'un point quelconque de la tangente assujettie à passer par le point de tangence et par le point A; son équation sera

$$Y' = \frac{y'}{(x'+b)}(X'+b);$$

qui devient par les valeurs trouvées précédemment

$$Y'=\frac{2r(b+\alpha)}{(b+\alpha)^2-r^2}(X'+b).$$

D'après la remarque faite plus haut, l'équation de la seconde tangente sera

$$Y'=\frac{2r(\alpha-b)}{(\alpha-b)^2-r^2}(X'-b).$$

Nommons X et Y les coordonnées du point de rencontre des deux tangentes; en résolvant la première équation par rapport à $(b+\alpha)$, nous aurons

$$b+\alpha=\frac{r(X+b)}{Y}\pm\sqrt{r^2+\frac{r^2(X+b)^2}{Y^2}}$$

la seconde donnera, après avoir changé le numérateur $2r(\alpha-b)$ en $-2r(b-\alpha)$,

$$b-\alpha=-\frac{r(X-b)}{Y}\pm\sqrt{r^2+\frac{r^2(X-b)^2}{Y^2}}:$$

en ajoutant ces équations membre à membre, nous obtenons entre x et y, l'équation suivante indépendante de α, qui est celle de la courbe cherchée

$$2b=\frac{2rb}{Y}+\sqrt{r^2+\frac{r^2(X+b)^2}{Y^2}}+\sqrt{r^2+\frac{r^2(X-b)^2}{Y^2}}$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$2b(Y-r)=r\sqrt{Y^2+(X+b)^2}+r\sqrt{Y^2+(X-b)^2}$$

et qui conduit au théorème suivant, déjà connu : l'*aire* d'un triangle est égale à la somme de ses trois côtés, multipliée par la moitié du rayon du cercle inscrit : en effet, on voit que

$$\sqrt{Y^2+(X+b)^2}=AB,\quad \sqrt{Y^2+(X-b)^2}=BC$$

d'où

$$2b(Y-r)=r(AB+BC)=AC(Y-r)$$

puisque

$$2b=AC;$$

de cette équation on tire les proportions suivantes :

$$AB+BC : AC :: Y-r : r$$
$$AB+BC+AC : AC :: Y : r$$

d'où

$$AC \times Y = r(AB + BC + AC).$$

En nommant S la somme des côtés et A l'aire du triangle, il vient

$$2A = rS$$

d'où

$$A = \frac{r}{2} S$$

conformément au théorème connu. On observera qu'en partant de ce théorème, on pourrait remonter à l'équation.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE (*).

Trisection de l'angle ou de l'arc qui sert à le mesurer, résolue par MASSDARIEDSCHISADE SEID HUSSEIN. (*Extrait de* Heidelberger Jahrbücher der Literatur. *Annales littéraires de Heidelberg, février* 1826, *n.* 9).

I.re PARTIE.

Il a paru, l'an dernier, à Constantinople, une petite brochure extrêmement remarquable en ce sens qu'elle peut donner une juste idée des progrès des études géométriques en Turquie. L'auteur de cet écrit (de dix-sept feuilles *sans titre*) ne prétend à rien moins, qu'à la gloire d'avoir trouvé la démonstration jusqu'à présent inutilement cherchée par

(*) Cet écrit nous a paru assez piquant sous le rapport historique, pour trouver place ici : comme il est trop étendu pour être donné dans son entier, nous le diviserons en deux parties dont la première comprend la solution du géomètre Turc, et la seconde les observations du géomètre Allemand : celle-ci paraîtra dans le prochain cahier. LES EDITEURS.

les géomètres, de la *Trisection de l'angle*, ou de l'arc qui sert à le mesurer. Depuis l'établissement de l'*Ecole du génie*, à Constantinople, qui fut fondée vers la fin du siècle passé par Selim III, dans le faubourg du port Chasköi, cet écrit est, après un intervalle de plus de vingt ans, le premier ouvrage géométrique par lequel cette école se signale de nouveau, ou reparaît à ce qu'elle croit, brillante d'un éclat tout-à-fait nouveau. D'abord sept traités sur les mathématiques avaient été publiés à Constantinople, dans l'espace de trois ans (depuis 1800 jusqu'en 1802) savoir : 1. *Telchissul-eschkial*, c'est-à-dire, épuration des figures, par *Hussein*, de *Taman* [Mémoire sur les mines, l'an de l'hégire 1215 (1800)]. 2. *Rissaletfil-hendesset*, c'est-à-dire, Mémoire géométrique avec sept planches, l'an de l'hégire 1217 (1802). 3. Tables de logarithmes, sans indication de lieu ni d'année. 4. Tables à l'usage des bombardiers, également sans lieu, ni date. 5. *Ussuli-hendesset*, c'est-à-dire, Elémens de géométrie, traduits de l'anglais de *Bonny-Castle*, par *Hussein*, de *Taman*, sans lieu d'impression. 6. *Medschmuatul-muhendissin*, c'est-à-dire, Recueil des géomètres ou institutions sur la géométrie pratique, par le même auteur. 7. *Imtihanul-muhendissin*, c'est-à-dire, Examen des géomètres, par le même; imprimé à Skutari, an de l'hégire 1217 (1802).

Tous ces livres élémentaires ne sont que des traductions d'ouvrages de géométrie, publiés en Europe : aucun d'eux n'atteste des études particulières, des recherches propres aux professeurs Turcs. Le cas est différent pour le présent mémoire dont l'auteur se distingue avantageusement de tous ses collègues tant professeurs qu'instituteurs adjoints à ladite académie, et se montre *un habile géomètre* cultivant par lui-même, avec une louable ardeur, la science, bien que sa prétendue solution de la trisection de l'angle, ne puisse soutenir le plus léger examen, et qu'elle repose sur une illusion assez grossière. On n'apprendra pas sans quelqu'étonnement, non pas que *Seid Hussein*, fils du receveur de péage (c'est ce que veut dire le mot *massdariedschisade*), ait fait prendre le change au sultan sur le mérite de sa démonstration, mais qu'il ait pu s'abuser lui-même et surprendre les suffrages de tous les professeurs et adjoints de l'académie en présence desquels il avait été admis à exposer au sultan sa solution, au point que ceux-ci n'aient point hésité à lui donner en due forme l'attestation rapportée pag. 22 (de son écrit), en faveur de la présente démonstration

de la trisection de l'angle ou de l'arc qui le mesure. Cet acte singulier dépose clairement contre l'état des connaissances en géométrie, du personnel de l'Académie turque. Comme d'après le droit civil des Musulmans (ainsi que d'après l'ancien droit Romain), l'affirmation de sept témoins donne la garantie la plus complette et la plus authentique de la vérité, la présente attestation géométrique est également faite et souscrite par sept témoins, savoir les quatre *Chodschas* ou professeurs, et trois *Chalifes* (on prononce ordinairement *Chalfas*), c'est-à-dire, adjoints à l'Académie; l'auteur qui en est le quatrième, ne pouvant naturellement signer dans sa propre cause. *Hussein* dans sa préface, rappelle que, dans la grande Encyclopédie, le problême de la trisection de l'angle a été déclaré insoluble, et que dans la traduction Turque d'Euclide, cette trisection n'a été montrée que par la pratique seulement. Ensuite il continue, pag. 5, jusqu'à la fin de la préface, en ces termes :

« Louange et encore une fois louange! par la grâce de Dieu tout » sage, tout puissant; par les miracles du Prophète, notre seigneur » et sauveur des deux mondes (sur lesquels soient prière et bénédiction), » et par la force du bonheur fleurissant et l'influence du fruit de jus- » tice du monarque ornant actuellement le trône; comblant de féli- » cité le monde placé sous sa garde; réjouissant et assistant par la » splendeur de son règne les serviteurs qui lui sont dévoués; extirpa- » teur des méchants qui se révoltent contre lui (*); conservateur de la » plus vraie de toutes les religions; protecteur des pays habités par » les Musulmans; lequel (monarque) est béni par la bénédiction toute » puissante; conduit par la conduite divine; sultan de deux conti- » nens; dominateur des deux mers; gardien des deux nobles sanc- » tuaires (Mecque et Médine); sultan, fils et petit-fils de sultan; » sultan Mahmudchan-Ghasi, issu du sultan Abdulhamidchan-Ghasis, » lequel est issu du sultan Achmedchan-Ghasi. (Dieu prolonge sa » vie et lui donne un règne fortuné, force et pénétration pour » commander); le plus faible, le plus débile, le moins digne, le » moins puissant de ses serviteurs, Massdariedschisade *Seid Hussein*, » premier adjoint à l'Académie impériale du génie, a, le treizième

(*) Il veut probablement désigner les Grecs aux ancêtres desquels il doit le peu qu'il sait.

» jour du mois schaaban de l'année 1237 (le 16 mai 1821), heu-
» reusement trouvé la démonstration de la trisection de l'angle et
» de l'arc qui en est la mesure, laquelle démonstration avait été
» depuis trente ans jugée introuvable par les Géomètres. La pré-
» sente attestation à l'effet de constater qu'il a établi cette démons-
» tration géométriquement, a été dressée par tous les *chodschas* et
» *chalifes* de l'Académie, et munie de leurs sceaux et signatures.
» Ainsi cette difficulté regardée depuis long-temps comme impos-
» sible à résoudre, est enfin dénouée très-heureusement, et il est
» clair que la présente solution pourra désormais servir à résoudre
» plusieurs autres points réputés très-ardus et difficiles en géomé-
» trie. C'est à cause de quoi la présente exposition avec mille dé-
» fauts et imperfections, a été soumise au trône royal; car si le
» plus juste des monarques la juge digne seulement de la moitié
» d'un regard, *le dôme de la gloire ne pourra manquer de se*
» *voûter au-dessus d'elle.*

» Ma plus humble espérance est qu'il plaira à la haute et juste
» volonté de sa majesté, de faire insérer la relation de cet événe-
» ment dans les Annales de l'empire, pour attester que la solution de
» cette difficulté par le moyen des plus profondes sciences, a été
» trouvée du temps de son règne glorieux, dans l'Académie des
» ingénieurs de la sublime Porte-Ottomane, afin que si le hazard
» la faisait tomber entre les mains des géomètres de l'Europe, ils
» ne puissent s'en approprier l'invention; et que par conséquent
» cet article imprimé séparément, soit déposé dans la bibliothèque
» de l'Académie impériale du génie, ainsi que dans toutes les au-
» tres bibliothèques de l'empire. »

Pour être aussi bref que possible, nous suivrons la démonstration de *Seid Hussein,* jusqu'à l'endroit fautif, imprimé en *petit-texte* (*). Alors pour éviter des détours inutiles, nous amènerons plus rapidement la conclusion. Pour diviser en trois parties égales l'angle *bac* (*fig.* 58), ou l'arc *brqc* par lequel on le mesure, décrivez du sommet *a* avec un rayon arbitraire *ab*, le demi-cercle *bcd* : des points *c* et *d* élevez sur *bd* les perpendiculaires *ce* et *df*; par le point *c* et par *g* qui divise en deux la ligne *ce*, tirez les lignes *cf* et *gh*, parallèles au diamètre *bd* : ensuite du point d'intersection *k* des droites

(*) Qui termine cette première partie.

ae et *gh*, qui en même temps divise en deux parties égales *ac*; décrivez avec le rayon *ka* la périphérie *aec*, et du point *g* avec le rayon *gh* décrivez l'arc *hi* : joignez *i* et *c*, et du point de rencontre *l* des droites *gh* et *ic*, menez *mn* parallèle à *gh*. Maintenant si vous joignez *i* avec le point d'intersection inférieur *o* de la droite *mn* et de la périphérie *aec*, et que vous prolongiez cette ligne *io* jusqu'à ce qu'elle coupe la périphérie *aec* en *p*, il s'en suivra qu'en tirant *ap*, en la prolongeant jusqu'en *q*, et en menant ensuite *ar* parallèle à *ip*, l'arc *bc* sera divisé en trois parties égales *br*, *rq* et *qc*.

La vérité de cette trisection est démontrée de la manière suivante. Joignez le point d'intersection supérieur *s* de la droite *mn* et de la périphérie *aec*, aux points *c*, *a* et *i*, et prolongez *cs* jusqu'à ce qu'elle coupe le diamètre prolongé en *t*, et *gh* en *v*. Comme *gl* est parallèle à *ei*, et que *ec* est divisée en deux parties égales, *gl* doit aussi diviser également *ci*; donc les triangles rectangles *cnl* et *lmi*, à cause des hypothénuses égales *cl* et *li*, des cathètes égales *ln* et *lm*, seront parfaitement égaux, et par conséquent $mi = nc = em$. En passant aux triangles rectangles *omi* et *snc*, on trouve qu'ils ont outre les cathètes *mi* et *nc*, aussi les cathètes *om* et *sm* égales l'une à l'autre; car, à cause de $ln = lm$ et de *kl* perpendiculaire à la corde *so*, on aura $ls = lo$, et $ln - ls = lm - lo$, ou $sn = om$: ces triangles sont donc parfaitement égaux : donc l'angle $moi = nsc = osv$, et *oi* est parallèle à *ct*. Ensuite *kv* étant parallèle à *at*, et *ck* étant la moitié de *ca*, *kv* doit également être la moitié de *at*. *Maintenant* kv *étant parallèle à* it, *et* ki *parallèle à* vt, kv *doit être* $=$ it, *et comme* kv *est la moitié de* at, it *doit également être la moitié de* at, *ou* $it = ai$. Puisque *csa* est un angle droit, et *ik* parallèle à *cs*, les angles en *u* doivent être droits, et *ik* doit diviser en deux la corde *sa*. Les triangles rectangles *sui* et *aui* sont par conséquent, à cause de la cathète commune *ui* et des cathètes égales *us* et *ua*, égaux entre eux, et $ai = si$. Si vous joignez *s* avec *p*, les triangles *pos* et *kol* auront l'angle *o* commun, et les côtés qui renferment cet angle dans les deux triangles, sont proportionnels ; conséquemment les triangles sont semblables, et *ps* est le double de *kl* et parallèle à *kl*. A cause des triangles semblables *kcl* et *aci*, *ai* est le double de *kl*; donc *ps* est égal et parallèle à *ai*, et les droites *ap* et *is* sont de même égales et parallèles entre elles. On aura donc $ap = is$; et comme $is = ai$, pareillement $ap = ai$; donc

le triangle *pai* sera isoscèle. Maintenant l'angle extérieur $pab = api + pia$, ou, à cause de $api = pia$, on a $pab = 2pia$; et puisque *ar* a été menée parallèle à *ip*, on a $pab = 2bar$, donc $bar = qar$. L'angle *pac* à la périphérie et l'angle *pkc* au centre, s'appuient sur le même arc *pc*; donc $cap = \frac{pkc}{2}$ or; l'angle *pkc* étant $= car$, à cause des parallèles *pk* et *ra*, on aura $cap = \frac{car}{2} = par = rab$.

Il ne peut échapper aux mathématiciens que *Seid Hussein* (dans le passage imprimé en *italique*), prétend que *ki* est parallèle à *vt* : il suppose donc que le prolongement de la droite *oi*, qui effectivement est parallèle à *vt*, doit nécessairement passer par le centre *k* : la construction de la figure peut l'avoir induit à faire cette supposition gratuite; car en suivant sa méthode, le prolongement de *oi* passe effectivement par le centre. Mais cela n'est qu'apparent, et provient de l'impossibilité dans laquelle nous sommes de représenter visiblement des points et des lignes mathématiques. En géométrie, le témoignage des sens n'est point valable. Si donc *Seid Hussein* veut avoir une prétention fondée à la gloire d'avoir trouvé la trisection de l'angle, il faut qu'il nous démontre que le prolongement de *oi* doit nécessairement passer par *k*. Aussi long-temps qu'il n'aura pas prouvé cela, la question restera dans l'état où il l'a trouvée; car en supposant, par exemple, que le prolongement de *oi* passe par k', nous aurions $k'v = it$, et comme $k'v$ n'est pas comme *kv* égale à la moitié de *at*, *it* ne sera pas non plus $= \frac{at}{2}$ et conséquemment $= ai$. La démonstration ultérieure du professeur turc repose sur cette égalité $ai = it$, et sur ce que la corde *as* est divisée en deux parties égales par la perpendiculaire *ik*, données qui ne sont vraies que dans le cas ou ik' est identique avec *ik*, ou passe par le centre.

D'après la *méthode* de *Seid Hussein*, aucun autre angle, dans le fait, que celui de 90 degrés, n'admet la trisection mathématiquement : ainsi son *procédé* se restreint à un problême depuis long-temps résolu. En voici la démonstration :

(*La suite au prochain cahier.*)

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Notice historique par M. Hachette, *de la faculé des sciences de Paris, etc., sur le problême suivant :*

Connaissant dans une pyramide triangulaire, la base et les angles des arêtes opposés aux côtés de la base, construire le sommet de la pyramide (*).

Le deuxième vol. des Savans étrangers, Académie de Paris, année 1754, contient un petit mémoire de trois pages et demie, dans lequel *Estève*, de la Société royale des sciences de Montpellier, s'est proposé de résoudre la même question énoncée de la manière suivante : « La base d'une pyramide triangulaire étant donnée, avec les angles » au sommet, déterminer les dimensions de la pyramide. » La solution qu'il en a donnée, est algébrique; il prend pour inconnues dans la pyramide triangulaire ANMP (*fig.* 59), les trois angles AMN, AMP, APN, les six quantités connues étant d'une part les trois côtés NM, PM et PN et les trois angles opposés à ces côtés, savoir : NAM, PAM et PAN.

Posant NM $= b$, MP $= c$, PN $= q$, les angles AMN $= x$, AMP $= y$, APN $= z$, et les supplémens $x + B = x'$, $y + C = y'$, $z + D = z'$; on aura

$$\sin. x' = \sin. (x + B); \sin. y' = \sin. (y + C); \sin. z' = \sin. (z + D).$$

Chacune de ces trois arêtes AM, AP, AN appartient à deux faces de la pyramide; d'où l'on tirera pour chacune d'elles, deux valeurs

---

(*) Voyez le cahier précédent de la *Correspond. math.*, pages 142 et 145.

savoir :

$$AM=\frac{b\sin. x'}{\sin. B}=\frac{c\sin. y'}{\sin. C};\ \text{ou :}\ \frac{b\sin.(x+B)}{\sin. B}=\frac{c\sin.(y+C)}{\sin. C}\dots (1)$$

$$AP=\frac{c\sin. y}{\sin. C}=\frac{d\sin. z'}{\sin. D};\ \text{ou :}\ \frac{c\sin. y}{\sin. C}=\frac{d\sin.(z+D)}{\sin. D}\dots\dots (2)$$

$$AN=\frac{b\sin. x}{\sin. B}=\frac{d\sin. z}{\sin. D};\ \text{ou :}\ \frac{b\sin. x}{\sin. B}=\frac{d\sin. z}{\sin. D}\dots\dots\dots\dots (3)$$

Ces trois équations renferment la solution du problême considéré dans toute sa généralité, et on en déduirait les valeurs de sin. x, sin. y, sin. z. *Estève* n'a pas donné pour le cas général l'équation finale qui ne contiendrait qu'une seule inconnue, par exemple, sin. x; il n'a achevé la solution que pour le cas particulier où les deux angles x et z seraient égaux. Alors l'équation (3) donne $\frac{b}{d}=\frac{\sin. B}{\sin. D}$; c'est-à-dire que ces côtés b et d de la base de la pyramide, sont proportionnels aux sinus des angles opposés que l'arête AN qui passe par le point d'intersection des deux côtés NM et NP, fait avec les deux autres arêtes AM et AP de la pyramide.

Dans cette hypothèse particulière, l'équation finale est du quatrième degré en sin. x, et se résout à la manière des équations du second degré.

En 1773, *Lagrange* a publié dans le volume de cette année de l'Académie de Berlin, un mémoire sur la pyramide triangulaire, où l'on trouve les trois équations suivantes qui renferment la solution algébrique de la même question. Prenant pour inconnues les trois arêtes de la pyramide, et les désignant par les lettres X, Y, Z, on a $b^2=X^2+Y^2-2XY\cos. B$; $c^2=Y^2+Z^2-2YZ\cos. C$; $d^2=Z^2+X^2-2ZX\cos. D$. Eliminant Y et Z, l'équation finale en X serait du 8.me degré (*).

En 1795, *Lagrange* a traité cette question plus spécialement, dans le cours de mathématiques qu'il fit aux écoles normales de cette année, conjointement avec M. *De Laplace*, et il fit observer qu'en

(*) Ainsi que M. *Lacroix* l'a remarqué dans ses Elémens de géométrie descriptive; 1.re édition, année 1795, page 85.

prenant pour inconnue l'une des arêtes, et les rapports de celle-ci aux deux autres, l'équation finale ne serait que du quatrième degré. J'ai développé le calcul seulement indiqué par *Lagrange* dans le II.e tome de la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, page 334 (juillet 1812), et j'en avais conclu que le nombre de solutions possibles pouvait s'élever à huit, ce qui n'aurait été démontré par l'équation finale du huitième degré, qu'autant qu'il aurait été prouvé qu'elle ne contenait ni racines égales, ni racines imaginaires.

Estève avait fait précéder sa solution de cette remarque, que le problême n'était pas de pure spéculation; qu'il pouvait être utile dans la géographie qui en avait fait naître l'idée, et qu'on pourrait l'énoncer ainsi :

« Etant placé sur le sommet d'une montagne et connaissant la » distance qu'il y a entre trois objets qu'on découvre dans la plaine, » il s'agit de déterminer du même sommet, par les règles de la tri- » gonométrie, la hauteur de la montagne, et la distance à chacun » des objets qui sont dans la plaine, enfin tout ce qui appartient à » la pyramide dont la base connue est dans la plaine et le sommet » à l'œil de l'observateur qui y mesure les angles formés. »

On sait que la géométrie descriptive a pris naissance à l'Ecole royale du génie, établie à Mézières en 1748, et que *Monge* a professé dans cette école pendant vingt ans, de 1764 à 1784. On y proposait comme une application de la géométrie descriptive à la topographie, le problême d'*Estève*. *Monge* en a donné la solution dans ses leçons aux écoles normales de 1795, et l'a publié dans le journal de cette école, tome III, pages 347-352. Si cette question était traitée par l'analyse, elle conduirait généralement, dit *Monge*, pag. 349 du même journal, à une équation du 64.me degré. Ce géomètre supposait qu'on aurait pris pour inconnues les trois coordonnées du sommet de la pyramide : ce sommet ayant pour lieux géométriques, trois surfaces annulaires dont les équations étaient chacune du quatrième degré, on pouvait en conclure que généralement l'équation finale non-réduite, serait du 64.me degré. *Monge* n'avait pas effectué ses calculs; il voulait seulement montrer qu'il y a des cas où les considérations synthétiques sont préférables à l'analyse algébrique : il n'aurait pas cherché à démontrer la possibilité d'un aussi grand nombre de solutions, s'il avait porté un moment son attention sur les équations

trouvées par *Estève* et par *Lagrange*. Cette erreur rappelée par M. *Bruno*, avait été corrigée dans l'édition de la Géométrie descriptive de *Monge*, qui a paru en 1811, augmentée de mon supplément. D'ailleurs on ne sera point étonné que quelques inexactitudes se soient glissées dans le journal des Ecoles normales, lorsqu'on saura que les Professeurs improvisaient leurs leçons; que les sténographes les recueillaient, et que chaque jour les nombreux élèves de cette école, retrouvaient dans le journal qu'on leur distribuait, l'instruction qu'ils avaient reçue la veille.

Quoique je fusse assuré que le nombre de pyramides de même base, qui satisfont aux conditions du problême, était de seize dont huit étaient symétriques des huit autres, je n'étais point parvenu à trouver les données qui répondaient à ce nombre *maximum* de solutions. Cependant ce problême a fait long-temps partie du travail graphique des élèves de l'Ecole polytechnique, que je dirigeais, et je sentais la nécessité de leur présenter une construction complette du cas le plus général; ce qui m'a fait rechercher la solution que j'ai exposée dans le supplément de la Géométrie descriptive de *Monge*, année 1811, pages 110-118; dans la Correspondance sur l'Ecole polytechnique, tom. 2, page 332 (juillet 1812), et plus récemment dans mon Traité de Géométrie descriptive, édition 1822, pages 153 et 263.

Le problême général de la pyramide est évidemment un cas particulier du premier problême (voyez le cahier précédent, page 142) résolu par M. *Bruno*. Les trois faces de la pyramide étant connues, on sait construire les angles que les plans de ces faces font entre eux, et la position de l'une quelconque des trois arêtes, par rapport au plan des deux autres arêtes, est déterminée. On peut donc prendre un point quelconque sur une arête, et conduire par ce point un plan qui coupe les deux autres arêtes en deux points tels que les trois points soient les sommets d'un triangle semblable au triangle qui sert de base à la pyramide, et qui, par hypothèse, est donné. Le plan du triangle semblable à la base donnée, étant trouvé, un plan parallèle donnera la base elle-même. Ainsi pour ramener le premier problême de M. *Bruno* à la pyramide, il suffit de supposer que les deux droites données se coupent en un point qui devient le sommet de la pyramide. J'ai fait voir que le premier problême était

susceptible de huit solutions; d'où il suit que la seconde question relative à la pyramide triangulaire, admet le même nombre de solutions.

Solution par la Géométrie descriptive du problême proposé à la page 142 du précédent cahier.

Etant donnés un point et deux droites dans l'espace, mener par le point, un plan qui coupe les deux droites en deux autres points, tels que les trois points soient les sommets d'un triangle semblable à un triangle donné.

Soient A le point et M et N les deux droites : supposons qu'on joigne le point A au point m de la droite M, et que l'on construise sur mA un triangle semblable au proposé : il est évident que ce triangle pourra prendre un nombre infini de positions, en le fesant tourner autour de son côté mA comme charnière : mais pendant ce mouvement, ses deux sommets m et A ne changeront pas de place et le troisième sommet x décrira une circonférence dont le centre se trouvera quelque part en O sur mA ou sur le prolongement de mA. Mais si la droite, menée du point A, parcourt successivement tous les points m, m', m'', etc., de la droite M, et qu'en chacune de ses positions on lui fasse faire une révolution autour de son côté, la suite des points O, O', etc., sera sur une droite parallèle à M, comme nous l'avons déjà fait voir dans le cahier précédent; et la suite des circonférences engendrées par les points x, x', etc., formera une surface X sur laquelle se trouvent les troisièmes sommets des triangles cherchés. On aura donc ces sommets, en cherchant les points où la surface est coupée par la droite N.

Pour effectuer facilement la construction que nous venons d'indiquer, on pourra choisir pour plan de projection verticale le plan qui contient le point A et la droite M; et pour ligne de terre, la droite parallèle à M qui contient les centres O, O', etc., des circonférences : toutes ces circonférences ont des rayons et des directions qui se déterminent sans peine, d'après le théorème que j'ai démontré page 146.

Cela posé, on concevra par la droite N un plan vertical dont la trace horizontale sera N′ : ce plan coupera la surface X selon une ligne qui par son intersection avec N, donnera les solutions démandées. Or, la ligne d'intersection du plan vertical qui contient N, avec la surface X, est facile à construire, puisque c'est la suite des points d'intersection de ce plan avec toutes les circonférences qui ont leurs centres sur la ligne de terre et leurs rayons déterminés.

Cette solution que l'on concevra facilement sans figure, est à la fois facile et générale : elle embrasse le cas particulier où les deux droites M et N seraient parallèles; elle se simplifie même dans cette circonstance, puisque le plan vertical qui contient N, devient parallèle au plan de projection verticale.

Cette solution et celles qui ont été données dans le cahier précédent, peuvent servir de réponses à la question proposée par M. *Gergonne*, dans son excellent journal (voy. les Annales math., cahier de juin).

A. Q.

Extrait d'une lettre de M. Hachette, *de la faculté des sciences de Paris, etc., à M.* A. Quetelet.

M. *Blanchet*, chargé des cours de physique au Collége de Bourbon, m'a communiqué une observation qui se place très-bien à côté des élégans théorêmes sur les foyers des courbes du second degré (*). SR′ (*fig.* 60) est l'axe d'un cône droit; CS et DS les deux côtés de ce cône dans le plan de l'axe; PQ le plan coupant; AB le plan de la section circulaire du diamètre AB. M. *Blanchet* a remarqué que l'intersection de ces deux plans PQ et BA, était la *directrice* de la section conique. Cette directrice se projette en T, et si l'on couche le plan PQ sur le plan horizontal, elle sera TT′ perpendiculaire à PQ. Soit mené MN parallèle à AB, et nommons (M) et (*i*) les points du cône dont M et *i* sont

(*) Voyez les cahiers précédens (vol. I, p. 267 et 355; vol. II, p. 30).

les projections : on aura (M) F = (M) (I) = BN. Or, BN : TM = QB : QT = sin. BTQ : sin. QBT ; donc $\frac{BN}{TM}$ = constante = $\frac{(M)F}{TM}$, et parce que la distance du point (M) à la droite TT′, est égale à TM, cette droite TT′ jouit de la propriété que les distances d'un point quelconque (M) de la section conique à cette droite et au foyer F, sont dans un rapport constant, ce qui est le caractère de la directrice.

Nous apprenons par une lettre de M. *Lemaire*, que ce professeur a introduit avec succès dans l'enseignement élémentaire à l'Athénée de Tournai, la considération des projections stéréographiques. C'est une méthode que nous ne saurions trop recommander ; elle forme, pour ainsi-dire, la partie complémentaire des élémens de géométrie. J'ai eu personnellement occasion de remarquer que loin d'arrêter les élèves, elle excite leur attention et contribue puissamment à développer leur intelligence. M. *Lemaire* nous fait parvenir en même temps la démonstration suivante d'un théorème déjà énoncé, dans ce recueil. *Les côtés opposés de deux triangles, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cercle, concourent sur une même droite* (*). Soit conçue une sphère dont le cercle est une section plane et un cône circonscrit à la sphère, ayant le cercle pour ligne de contact ; soient désignés respectivement par A et *a*, B et *b*, C et *c* les côtés du triangle circonscrit et leurs opposés dans le triangle inscrit. Par deux des points de concours A*a* et B*b*, concevons une droite et par cette droite un plan tangent à la sphère du côté opposé aux triangles : si l'on place l'œil au point de contact, le plan de perspective sera parallèle au plan tangent, et les perspectives des droites A et *a* seront des droites parallèles, ainsi que celles des droites B et *b*; la projection stéréographique de la figure proposée, présentera donc deux triangles équilatéraux, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cercle qui est la perspective du cercle proposé, et qui a pour centre la projection du som-

---

(*) Voyez page 262, § II du 1.er vol.

met du cône. Les droites C et c auront donc aussi pour perspectives deux droites parallèles; elles concourront donç en un point du plan tangent : les trois points Aa, Bb et Cc étant à la fois dans ce plan et dans le plan de la figure proposée, se trouvent sur une même droite.

A. Q.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Sur la résolution des équations numériques; par M. A. TIMMERMANS, *professeur de mathématiques spéciales au Collége royal de Gand.*

Lorsque par les moyens connus, on est parvenu à déterminer la valeur approchée de l'une des racines d'une équation numérique, si la nature de la question qui a conduit à cette équation, exige une grande exactitude dans la valeur de la racine, on sait combien les substitutions successives que l'on doit faire deviennent longues et pénibles, si le degré de l'équation est un peu élevé : notre but est d'exposer un moyen prompt et facile d'approcher de la valeur exacte de la racine, en évitant jusqu'à un certain point l'emploi de ces substitutions; pour cela proposons-nous de résoudre l'équation

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \text{etc.} = 0$$

Soit x' une valeur de x donnée par une première approximation et telle qu'en la substituant à x, elle réduise l'équation à une petite fraction; quelque valeur que l'on donne à x, on pourra toujours considérer la fonction précédente comme étant le coefficient différentiel d'une autre fonction; alors les racines seront les valeurs de x qui

rendent le $\frac{dy}{dx}$ nul ; on pourra donc poser

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \text{etc.} = \frac{dy}{dx}$$

d'où l'on tire

$$y + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{px^n}{n} + \frac{qx^{n-1}}{n-1} + \text{etc.} \ldots\ldots \quad (1)$$

Puisque les racines rendent le $\frac{dy}{dx}$ nul, on voit qu'elles seront les abscisses des points où les tangentes à la courbe précédente, sont parallèles à l'axe des x ; c'est-à-dire, que les racines cherchées sont les abscisses des points culminans de la courbe (*fig.* 61) ; ensorte que si cette courbe est représentée par $mm'm''m'''$ etc., les racines seront ab, ac, ad, ae, etc. Supposons maintenant que la racine approchée x' soit ac' : l'ordonné y' qui lui répond, sera $c'n$, et la valeur de $\frac{dy'}{dx'}$ résultant de la substitution de cette racine approchée x', sera la tangente de l'angle ntc'. Soit r le centre du cercle osculateur au point m' ; comme le point n en est très-voisin, on peut supposer que ce cercle embrasse l'arc nm' ; et si on désigne par ρ le rayon osculateur, on aura

$$no = nr \sin. nro = \rho \times \frac{\text{tang.}\, t}{\sqrt{1 + \text{tang.}^2\, t}} = \rho \times \frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}} ;$$

mais le cercle osculateur étant tangent à l'arc $m'n$, on a aussi

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}$$

ensorte que

$$no = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right] \frac{dy'}{dx'}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}$$

mais no est évidemment ce qui manque à la racine approchée x',

de sorte que la racine exacte sera

$$x' + \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]\frac{dy'}{dx'}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}$$

Remarquons aussi que la valeur de *no* doit toujours être ajoutée à x' avec un signe contraire; car au point m' où y est un maximum, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est négatif; or, si $\frac{dy'}{dx'}$ est positif, c'est-à-dire, si l'angle t est aigu, ou, ce qui revient au même, si le point n se trouve en deçà du point de culmination m', *no* dont la valeur précédente serait négative, devrait évidemment être ajouté; tandis que si le point n se trouvait au-delà, la valeur de *no* deviendrait positive, et devrait cependant être retranchée; en m'' où y serait un minimum, la même chose aurait lieu; en sorte qu'en laissant aux coefficiens différentiels leur signe, la valeur de la racine sera représentée en général par

$$x' - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]\frac{dy'}{dx'}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

OBSERVATION.

A la page 48 du II.e vol. de la Correspondance, nous avons rendu compte d'un mémoire de M. *Dandelin,* ayant pour titre : *Recherches sur la résolution des équations numériques,* auxquelles l'auteur doit ajouter deux parties relatives aux racines imaginaires et à la résolution des équations simultanées : nous y avons aussi mentionné une analyse par M. *Poinsot,* du traité de la résolution des équations numériques, où on trouve l'indication suivante : si l'on désigne par a une valeur approchée de la racine x, et par p son complément qui est une fraction décimale entre 0 et 1, et si on néglige les puissances de p, supérieures à la première, on sait que

$$p = b = -\frac{(X)}{(Y)}$$

où (X) représente la proposée $x^m - Ax^{m-1} \ldots - Tx + V = y$, en

changeant x en a, et (Y) le coefficient différentiel pour $x = a$: ainsi $b = -\frac{y\,dx}{dy}$ est la sous-tangente de la courbe, et $a + b$ cette sous-tangente augmentée de l'abscisse approchée a, c'est-à-dire, AT (*fig.* 62), A étant l'origine des coordonnées. Il est visible que l'extrémité T de cette tangente, peut, dans plusieurs cas, tomber au-delà de l'intersection R, par rapport à l'origine A. La chose n'arrive plus en passant à la courbe MnR' convexe vers l'axe, pour laquelle les valeurs approchées $a = AP$ et $a + b = AT$ sont convergentes en moins vers la racine AR'. En revenant à la courbe concave, on remarque, ainsi que l'a fait *La Grange,* que la seconde approximation AT peut s'écarter de la racine AR, plus que ne s'en écarte la première AP. On évite cet inconvénient, en tirant la corde de l'arc mm' dont les extrémités ont pour abscisses Ap et Ap' qui sont les limites de la racine AR, c'est-à-dire les valeurs de x qui donnent des résultats de différens signes. En effet, cette corde mm' traversant l'axe en un point r entre p et p', donne un point P plus voisin de l'intersection R, et conséquemment on est certain d'aller en approchant de la racine.

J. G. G.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

OBSERVATION.

La fraction $\frac{\sin.\varphi}{1-\cos.\varphi}$, sous l'hypothèse $\varphi = 0$; prend la forme $\frac{0}{0}$. Pour en connaître la valeur vraie, on peut 1.° Remplacer $\sin.\varphi$ et $\cos.\varphi$ par leurs développemens en séries, ce qui donne

$$\frac{\sin.\varphi}{1-\cos.\varphi} = \frac{\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \text{etc.}}{\frac{\varphi^2}{1.2} - \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}} = \frac{1 - \frac{\varphi^2}{1.2.3} + \text{etc.}}{\frac{\varphi}{1.2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3.4} + \text{etc.}} = \textit{infini}.$$

pour $\varphi=0$: 2.° Différentier le haut et le bas de la fraction, ce qui donne entre les coefficiens différentiels, la fraction

$$\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi}=\textit{infini}$$

comme ci-dessus pour $\varphi=0$. 3.° Employer la transformation

$$\frac{\sin.\varphi}{1-\cos.\varphi}=\frac{2\sin.\frac{\varphi}{2}\cos.\frac{\varphi}{2}}{2\sin.^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{\cos.\frac{\varphi}{2}}{\sin.\frac{\varphi}{2}}$$

qui, pour $\varphi=0$, donne l'infini. 4.° Substituer dans la proposée pour $\sin.\varphi$ et $\cos.\varphi$ leurs expressions finies en exponentielles imaginaires, savoir :

$$\sin.\varphi=\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos.\varphi=\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}$$

et alors la fraction devient

$$\frac{\sin.\varphi}{1-\cos.\varphi}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{\varphi\sqrt{-1}}-\frac{1}{e^{\varphi\sqrt{-1}}}\right)}{1-\frac{1}{2}\left(e^{\varphi\sqrt{-1}}+\frac{1}{e^{\varphi\sqrt{-1}}}\right)}\dots(a)$$

qui devient $=\frac{\frac{1}{2\sqrt{-1}}(1-1)}{(1-1)}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ pour $\varphi=0$, résultat qu'on donne pour valeur vraie de la proposée, dans une note sur un mémoire de M. *Ivory* (Bibl. univ. de Genève, mars 1826, p. 205). Cependant il nous semble que le facteur commun $1-1$ ramène à la fraction indéterminée $\frac{0}{0}$. Que conformément à la règle, on différentie le numérateur et le dénominateur de (a), et que dans le résultat, on pose $\varphi=0$ et on retombera encore sur l'infini. Nous soumettons la chose à un plus ample examen.

J. G. G.

ASTRONOMIE.

Extrait d'une lettre de M. BOUVARD, *de l'Institut de France, du Bureau des Longitudes, etc.* (*).

Je vous transmets les élémens elliptiques de la dernière comète, que M. *Gambard* a déduits de ses propres observations. Ces derniers élémens sont, je crois, les plus exacts qu'il soit possible de tirer des observations faites dans une seule apparition.

Passage au périhélie 1826. Mars, le 18, 97723, temps moyen à Marseille, compté de minuit.

$\frac{1}{2}$ Grand-axe.......	3,567050	
e Excentricité.......	0,7470093	
Distance périhélie...	0,902430	
Longit. du périhélie	109°. 51′. 32″	De l'équinoxe moyen du 9 mars 1826.
Longit. du nœud..	251 . 26 . 9	
Inclinaison........	13 . 33 . 15	
Révolution 6^{ans}, 737 = 2461 jours.		

(*) M. *Bouvard,* en passant par Bruxelles, m'ayant fait part des nouvelles corrections que M. *Gambart* avait apportées dans les élémens elliptiques de la comète de 1826, a bien voulu me les faire parvenir : on pourra voir par ces nouveaux calculs que l'identité des comètes de 1826 et 1805, doit définitivement être mise hors de doute.

A. Q.

Ces élémens représentent les observations suivantes :

Février.	28	— 3″	— 2″
Mars..	9	+ 7	— 14
	13	— 1	+ 5
	17	+ 6	+ 3
	21	— 2	+ 12
Avril..	1	— 5	— 6
	4	— 3	+ 6
	30	— 40	+ 51

Dans les premières observations, la comète était assez visible; mais dans la dernière, elle était extrêmement faible, de sorte que les erreurs sont un peu douteuses; cependant ces erreurs sont encore tolérables, de sorte que l'on doit regarder les élémens précédents comme très-approchés.

Les observations faites en 1805, calculées par M. *Gambart,* en supposant la révolution de $6^{ans},737$, donnent les élémens suivans :

Passage au périhélie 1806, janvier 2,4807 jours, temps moyen à Paris, compté de minuit.

½ Grand-axe	3,56705
Excentricité	0,7457842
Dist. périhélie	0,9068801
Longit. du périhélie	109°. 32′. 23″
Longit. du nœud	251 . 15 . 15
Inclinaison	13 . 38 . 45

On voit que ces élémens sont presque identiques avec ceux de 1826, ce qui prouve l'identité de ces deux comètes. Les élémens précédens représentent les observations de 1805 aussi exactement que les observations le comportent.

PHYSIQUE.

Aiguille d'inclinaison et de déclinaison.

Nous extrayons d'une lettre particulière les résultats suivans qui ont été recueillis à la leçon de physique de M. *Pouillet,* à la faculté des sciences de Paris : ils pourront intéresser les physiciens qui suivent les variations que subit annuellement l'aiguille aimantée tant en inclinaison qu'en déclinaison.

En 1580 la déclinaison était de 11° 30′ vers l'orient.
1618 .... 8° ex.
1663 la déclinaison était nulle.
1678 elle était de 1° 30′ vers l'occident.
1700 .... 8° ex.
1767 .... 19° 55′
1785 .... 22°
1805 .... 22° 5′
1813 .... 22° 28′
1817 .... 20° 19′ (M. *Pouillet* ne croit pas que
1823 .... 22° 11′ ce nombre soit une erreur.)
1825 .... 22° 12′ 48″ Au mois de sept. à 8 h. du m.
A midi, le même j. 22° 21′ 31″

L'inclinaison a été observée beaucoup plus tard ;

En 1798 l'inclinaison était de 69° 51′
1810 .... 68° 50′
1818 .... 68° 35′
1824 .... 68° 7′
1825 .... 68°

Ces résultats peuvent intéresser surtout dans un moment où de nombreux voyages entrepris et exécutés pour l'avantage des sciences,

vont jeter un nouveau jour sur les changemens de l'aiguille aimantée, instrument précieux dont la théorie doit d'une autre part tant de progrès aux recherches des physiciens modernes. Nous ne pouvons à cette occasion nous empêcher de citer un passage de l'excellent rapport fait à l'Académie des sciences de Paris, sur le voyage de découvertes de MM. *Duperrey* et *Durville*. « Des changemens en apparence si contradictoires, s'expliquent néanmoins très-simplement, » même sans qu'il soit nécessaire d'admettre un changement de forme dans l'équateur magnétique, pourvu que l'on suppose que cette » courbe est douée d'un mouvement de translation qui, d'année en » année, la transporte progressivement et en masse, de l'orient à » l'occident. De 1780 à l'époque actuelle, cette rétrogradation des » nœuds, pour qu'on put en déduire la valeur numérique des changemens observés dans les latitudes, ne devra guère être au-dessous » de 10°; si la rapidité de ce déplacement était regardé comme » une objection, nous ferions remarquer que les observations directes de la position des nœuds, conduisent, à fort peu près, aux » mêmes résultats. »

Il est à regretter que nous n'ayons point dans nos provinces d'observations que l'on puisse comparer à celles qui sont faites dans les établissemens scientifiques voisins. Un jour viendra où l'on reprendra pour le perfectionnement de la science, les observations faites avec assiduité sur les différens points du globe, et l'on pourra s'étonner que nos provinces méridionales qui comptent tant d'établissemens scientifiques, n'en aient point un où l'on observe assidûment et plusieurs fois par jour la déclinaison et l'inclinaison de l'aiguille. Il est à désirer qu'on cherche dès-à-présent à faire disparaître cette lacune.

A. Q.

Lettre de M. A. TIMMERMANS, *professeur de mathématiques spéciales au Collége royal de Gand, à M.* GARNIER.

Plusieurs journaux scientifiques de France, ayant annoncé qu'un physicien italien était parvenu à aimanter l'acier au moyen de certaines couleurs du spectre solaire, je voulus répéter cette singulière

expérience, quoiqu'on n'eut pas fait connaître la marche suivie par ce physicien : après avoir inutilement tenté plusieurs moyens, je suis enfin parvenu à développer la vertu magnétique dans de fines aiguilles d'acier, d'une manière assez sensible pour pouvoir la reconnaître à l'attraction et à la répulsion des pôles. Quelques jours après, M. *Quetelet* inséra dans la *Correspondance* (II.e vol. pag. 161), la traduction d'un mémoire de M.ress *Somerville*, sur le même sujet; cette *autre Marquise Du Chatelet* était parvenue à aimanter de fins ressorts d'acier, soit en les exposant à certains rayons du spectre solaire, soit en les plaçant sous des verres de la même couleur; mais je vous avoue que je tentai inutilement cette seconde expérience, quoique j'y aie mis toutes les précautions et toute la patience nécessaires, et que j'aie choisi le moment des grandes chaleurs que nous avons eues au commencement de juillet; cependant je me propose de continuer les mêmes recherches, et si je parviens à des résultats plus satisfaisants, je m'empresserai, Monsieur, de vous les faire connaître (*).

MÉTÉOROLOGIE.

Résultat des observations sur les étoiles filantes (voyez pag. 104 de ce volume).

La première soirée pour les observations sur les étoiles filantes, avait été fixée au 2 juin; mais malheureusement le ciel était cou-

---

(*) Nous avons essayé aussi et répété sans trop de succès, les expériences de M.ress *Somerville* déjà annoncées par M. *Arago*, à l'Institut de France, dès le 6 du mois de mai dernier. M. *Arago* vient d'annoncer encore une très-belle observation qu'il a faite sur le magnétisme par rotation. Nous en parlerons plus loin. A. Q.

vert et ne permit point de faire une seule observation dans toute l'étendue de nos provinces méridionales. A Bruxelles, le ciel était caché par des nuages épais qui semblaient annoncer un orage; quelques coups de tonnerre se firent même entendre vers le nord-est; le thermomètre de Réaumur marquait environ 18°; du reste le vent était assez faible.

Le 5 juin, nous fûmes plus heureux : le ciel était encore assez éclairé par les derniers rayons du crépuscule, et il ne nous fut guère possible de voir un peu distinctement les constellations, avant neuf heures et demie. L'air était humide et assez froid : quelques faibles nuages blanchâtres bordaient l'occident et s'étendirent peu à peu vers le zénith. J'avais invité plusieurs de mes élèves à prendre part aux observations, et ils me secondèrent avec le plus grand zèle. (MM. *Groetaers, Deman, Ramsay, Debavay*). Voici les résultats des observations.

NUM.	GRAND.	DURÉ.	TEMPS VRAI.	ASC. DR.	DÉCL.	*OBSERV.*
1	3e	2″	9 h. 48′	125° 139° 30′	77° 20′ 54° 45′	éclat brillant.
2	3e	1″	10 h. 2′ 20″	156° 145° 50′	67° 40′ 78	
3	4e	2″	28′ 35″	208° 205°	39° B. 21° 10′	faible.
4	(*)	—	—	—	—	—
5	5e	2″	31′ 30″	98° 129°	75° 30′ 63°	faible.
6	2e	3″	35′ 8″	213° 17′ 170° 30′	69° 69° 40′	très-brillant.
7	4e	2″	39′ 6″	159° 145°	56° 25′ 53°	
8	3e	2″	44′ 12″	258° 240°	15° 15° 30′	
9	3e	2″	58′	262° 30° 275°	51° 40° 45′	

(*) Une étoile filante fut aperçue presqu'en même temps que la 3e dans la direction de la petite ourse, mais elle ne put être suffisamment observée.

La première ligne, pour l'ascension droite et la déclinaison, indique l'endroit du ciel où l'étoile filante est devenue visible, et la seconde ligne, le point où elle a disparu.

Il ne nous est parvenu jusqu'à présent d'autres observations que celles de M. *Van Rees*, professeur à l'Université de Liége, qui était également secondé par M. *Plateau*, l'un de ses élèves. J'ai lieu de croire que ces deux observations de M. *Van Rees*, sont les mêmes que celles que j'ai indiquées aux num. 2 et 3; c'est ce dont le calcul pourra bientôt nous assurer (*).

NUM.	GRAND.	DURÉE.	TEMPS MOYEN.	ASC. DR.	DÉCL.
1	2e	1″	10 h. 10′	131°	47°
				126°	53°
2	3e	1″	35′	175°	50°
				172°	56°

M. *Van Rees* m'annonce qu'il n'est pas bien sûr de la seconde observation; il veut bien me promettre en même temps de continuer d'unir ses efforts aux miens. Je le prie ainsi que les personnes qui voudront bien s'occuper de ces observations, de les prolonger désormais jusque vers 11 heures et demie, en commençant vers 10 heures. Le trop de clarté du ciel a généralement nui aux observations et a rendu inutiles les secours de plusieurs amis des sciences et notamment de M. *Morren*, actuellement étudiant à l'Université de Gand. Je me plais à pouvoir compter ici M. *Morren* ainsi que M. *Plateau* au nombre de mes anciens élèves à l'Athénée de Bruxelles, trop heureux d'avoir pu contribuer à leur inspirer le goût d'une science, dans laquelle ils ne manqueront sans doute pas de se faire un nom par leurs talens et leur modestie.

A. Q.

(*) Comme nous l'avons déjà fait observer, faute d'instrumens astronomiques, nous ne pouvions avoir l'heure que d'une manière approchée.

STATISTIQUE.

Extrait d'une lettre de M. LEMAIRE, *à M.* A. QUETELET, *suivi de quelques observations sur des recherches semblables de MM.* MOURGUE, VILLERMÉ *et* MOREAU DE JONNÈS.

Comme je vous l'ai annoncé, je me suis occupé de recherches sur les lois de la mortalité à Tournay. Les données que j'ai recueillies sur cette matière et celles que j'avais déjà sur les naissances, m'ont conduit à des résultats que je m'empresse de vous communiquer. Vous savez que ces recherches ont porté sur l'intervalle de 1806 à 1825 inclusivement, c'est-à-dire, sur 20 années consécutives pendant lesquelles les registres de l'état-civil ont été tenus avec le plus grand soin.

Rapport des naissances féminines aux naissances masculines.	0,9467
» des décès féminins aux décès masculins..........	0,9106
» des décès aux naissances........................	0,8327
Nombre moyen des naissances par an..................	903,8
» » des décès »	752,4

Le premier de ces rapports diffère très-peu de celui que vous avez consigné, pour le Hainaut, dans votre lettre à M. *Villermé;* il diffère moins encore de la moyenne qu'on y trouve pour le royaume des Pays-Bas, et qui est de 0,947 (*). Celui des décès aux naissances, se rapproche d'une manière remarquable du nombre 0,8307 que vous donnez pour *Mons* (**). Cet heureux rapprochement prouverait,

---

(*) Lettre à M. *Villermé,* par M. *A. Quetelet,* pag. 4.
(**) Ibid. pag. 8.



au besoin, les soins et l'exactitude qui ont présidé aux recherches de M. *Lobatto*, et la confiance que méritent les résultats contenus dans son annuaire.

Le nombre moyen des naissances multiplié par 27,4 rapport que vous indiquez (*) comme celui de la population aux naissances dans le Hainaut, donne pour la population de Tournay 24764; ce qui est très-près de la vérité, cette population étant évaluée à près de 25000 ames.

Le nombre moyen des décès multiplié par 51,1 qui exprime le rapport de la population aux décès dans le Hainaut, donnerait 38447, résultat qui montre combien la mortalité est plus grande dans les villes que dans les campagnes et qui confirme l'opinion que vous avez émise, savoir, que lorsqu'il s'agit d'un royaume, les résultats obtenus pour une ville ne deviennent plus applicables.

Voici la loi des décès aux différens mois de l'année. Le nombre moyen des décès par mois a été pris pour unité.

ÉPOQUES DES DÉCÈS.	RÉSULTATS.
Janvier	1,2722 max.
Février............	1,1545
Mars...............	1,2352
Avril..............	1,0553
Mai................	0,9424
Juin...............	0,8776
Juillet............	0,7798 min.
Août...............	0,8003
Septembre..........	0,8604
Octobre............	0,8666
Novembre...........	0,9885
Décembre...........	1,1666

Ce tableau où j'ai tenu compte de l'inégale longueur des mois, présente avec celui que vous avez dressé pour Bruxelles, toute la conformité à laquelle on peut s'attendre en pareille matière. Il

(*) Lettre à M. *Villermé*, par M. *A. Quetelet*, pag. 5

donne la même époque pour le *maximum* et le *minimum;* le rapport de ces deux termes est 0,6129 ou à-peu-près $\frac{5}{2}$, et celui de février excepté, tous les résultats se succèdent d'une manière régulière et continue.

Je vous enverrai plus tard la table de mortalité dont je m'occupe (*).

M. *J. A. Mourgue* occupé pendant plusieurs années d'observations météorologiques, nosologiques et agronomiques, à Montpellier et dans les environs, a lié à son plan des recherches sur la vie des hommes et sur les effets de l'influence des météores atmosphériques sur les naissances et les mortalités. Les résultats de dix années d'observations, furent insérés dans *le volume des mémoires de la Société de Médecine de Paris, pour les années* 1780 *et* 1781. De nouvelles observations sur les naissances, les mariages et les décès dans la même ville, faites pendant 21 années consécutives, de 1772 à 1792 inclusivement, et les calculs qui en résultent sur les probabilités de la vie, font le sujet d'un autre mémoire consigné dans ceux des *Savans étrangers de l'Institut de France, tom. I. Sciences phys. et math.* Nous en ferons connaître les principaux résultats.

Pendant ces 21 années, 25064 naissances, 12919 de garçons et 12145 de filles : la proportion des naissances des garçons à celles des filles, a été de 21 $\frac{1}{4}$ garçons contre 20 filles. Par année commune, 1193 naissances dont 615 garçons et 578 filles.

Pendant ces 21 années, on compte 2735 naissances d'enfans illégitimes, savoir : 1373 garçons et 1362 filles. Ces naissances sont comprises dans les précédentes; elles forment un peu plus de la 9.e partie de la réproduction totale. De pareilles recherches faites dans les grandes villes, fournissent, à-peu-près, le même résultat.

En prenant le nombre des naissances d'un équinoxe à l'autre, l'auteur à trouvé de l'équinoxe d'automne à celui du printemps (du 1.er oct. au 31 mars) 13490 naissances et de l'équinoxe du printemps

(*) Nous pourrons donner en même temps le résultat des recherches de M. *Timmermans*, pour la ville de Gand.

à celui d'automne (du 1.er avril au 30 septembre) 11574 naissances, c'est-à-dire, un septième de plus, pendant la saison la plus froide. La différence proportionnelle du nombre des naissances des garçons et des filles, est plus grande pendant la première période que pendant la seconde. Les trois mois d'automne donnent au-delà d'un quart de naissances de plus que les trois mois du printemps. Le mois de janvier présente le plus grand nombre de naissances; celui de juin en présente le moins : la différence surpasse un tiers. Quant à la gravidation des femmes, il faut rétrograder de 9 mois : sous ce point de vue, janvier répond à mai, et juin répond à octobre. En général, les mois qui ont pour neuvièmes antérieurs, ceux qui se rapprochent le plus du printemps, sont ceux qui donnent le plus de naissances et *vice versa*.

Année commune, une naissance sur 27 $\frac{1}{2}$ individus; une d'enfant illégitime sur environ 253 individus.

Le nombre des mariages par année commune, a été de 282; la différence du *maximum* au *minimum*, est de 111. On compte 1 mariage sur 117 individus. En rapprochant le nombre moyen des naissances de celui des mariages, on trouve que le quart et un peu plus de ceux qui naissent, parvient à se marier.

Les 21 années donnent collectivement à Montpellier 23366 sépultures, 11703 parmi les hommes et 11663 parmi les femmes : augmentation de population, 1698 pendant 21 années. Année commune, 1112 $\frac{1}{8}$ décès. De l'équinoxe d'automne à celui du printemps, 11780 décès, dont 5852 d'hommes et 5928 de femmes; et de l'équinoxe du printemps à celui d'automne, 11586 décès dont 5851 d'hommes et 5735 de femmes : la différence est peu sensible. En considérant le nombre des sépultures par saison, on remarque que l'hiver et le printemps voient périr le moins de monde; que l'été et l'automne en voient périr le plus; que le printemps qui en voit périr le moins, est à l'été qui en voit périr le plus, dans la proportion d'environ 4 $\frac{1}{4}$ à 7. Les mois d'août présentent le plus de décès et les mois de mai en présentent le moins, dans la proportion de 3 $\frac{1}{4}$ à 2. Les mois d'avril, mai et juin ont donné 4461 morts, tandis qu'octobre, novembre et décembre en ont donné 6742. Sur les 23366 morts, on trouve 11497 enfans au-dessous de cinq ans, et sur ce nombre 5884 avant d'avoir accompli leur première année : c'est au-delà du quart de la mortalité générale.

Dans un mémoire de M. *A. Moreau de Jonnès*, sur le *déboisement des forêts*, inséré dans le volume des mémoires couronnés de l'Académie royale de Bruxelles, pour 1824–1825, on trouve ces résultats curieux.

Dans les parties de l'Angleterre, ventilées et salubres, il meurt chaque année

Dans le Sommerset... 1 individu sur 52.
le Devon........ 1 .... 58.
le Glocester..... 1 .... 61.
le Cornwal...... 1 .... 62.
Anglesey...... 1 .... 72.
le Cardiganshire. 1 .... 78.

Dans les provinces où le sol est alluvial, tourbeux et rempli de marais, on a pour perte annuelle

Dans le Lincoln ..... 1 individu sur 51.
le Norfolk....... 1 .... 50.
le Cambridge.... 1 .... 44.

A Batavia, la mortalité annuelle est ainsi qu'il suit (*)

CASTES.	POPULATION.	DÉCÈS.	PROPORTION.
Hollandais	8960	796	1 sur 11
Chinois..........	22000	769	1 .. 29
Javanais et Malais.	68000	1485	1 .. 46
Esclaves.........	17000	1326	1 .. 16
	115960	4316	1 sur $26\frac{1}{2}$

D'après *Barrow*, la mortalité pour les personnes nouvellement arrivées, est de 3 sur 5 pendant la première année, et ensuite de 9 à 12 sur 100.

(*) *Barrow*, Trav. in Coch. Tom. II, Cap. VII.

Ces résultats et d'autres encore que nous omettons, attestent, dit l'auteur, l'importance du dessèchement des marais, de l'épuisement des tourbières, et de la destruction des forêts noyées, désignées dans les deux Indes sous les noms de *Jungles* et de *Palétuviers*. Dans toutes les contrées nouvellement sorties des mains de la nature et que l'homme n'a pas encore appropriées à ses besoins, les forêts couvrent les plaines et sont entrecoupées de flaques d'eau, de lacs et de marais : tels sont l'Austrasie et les nouveaux états de l'Union-Américaine, vers les sources du Mississipi et du Missouri. C'est ainsi que *Strabon* peignait le nord de la France; *Tacite* le midi de la Germanie, et *Hippocrate* les rives du phase. C'est le contraire dans les pays où la race humaine semble avoir pris naissance; mais la terre étant privée d'humus végétal, ne fournit qu'à peine à la subsistance des hommes qui y vivent en nomades. Ce n'est que dans les régions qui sont le siège de la civilisation, de l'agriculture, de l'industrie et des arts, qu'on trouve une population puissante et s'accroissant rapidement (*).

M. *Villermé*, dans les bulletins de la Société médicale d'émulation, vient de publier un nouveau rapport sur les *recherches statistiques de la ville de Paris* (**), on n'y trouve pas moins d'observations intéressantes que dans son premier rapport que nous avons annoncé dans le volume précédent : il a successivement considéré la mortalité chez les riches, chez les pauvres dans les diverses professions, dans les hôpi-

(*) Sans sortir du domaine de la Statistique, nous pourrions consigner ici plusieurs résultats curieux empruntés à l'intéressant mémoire de M. *Moreau de Jonnès*; mais nous nous bornerons à l'observation suivante. Deux sortes de faits peuvent constater l'influence des bois sur la température : les uns sont ceux qui montrent que les différens termes de la chaleur atmosphérique, ne sont pas les mêmes, malgré l'identité de la position géographique dans les contrées déboisées et dans celles qui conservent une partie de leurs forêts. Les autres sont ceux qui attestent par l'existence ou la cessation de certains phénomènes, le changement de température qui s'est opéré dans une contrée, simultanément avec la destruction de ses bois.

(**) *Les Recherches statistiques* sur la ville de Paris, ne portent point de nom d'auteur; mais on n'ignore pas qu'elles sont dues principalement à MM. *Fourier*, membre de l'Académie des sciences, et *Villot*, chef du bureau des archives du département. On conçoit qu'un esprit d'analyse et une précision mathématique ont d'un bout à l'autre, présidé à leur rédaction (Rapport de M. *Villermé*).



taux, les hospices et les prisons. Il nous serait impossible de le suivre au milieu des nombreux résultats auxquels il est parvenu; nous nous contenterons ici de citer ceux qui se rapportent aux différences dans la mortalité suivant les mois et les saisons. « Dans la capitale, dit cet habile Médecin, c'est au printemps qu'il y a le plus de décès, et c'est en été qu'il y en a le moins; et cependant c'est presque toujours en automne qu'il y a le plus de malades. Je n'ai pas seulement consulté pour établir la première assertion, les recherches statistiques sur Paris; les résultats de deux années ne prouveraient rien : mais j'ai voulu connaître quels sont, pour une longue période, les mois les plus ou les moins chargés de décès et la proportion suivant laquelle chaque mois est l'un ou l'autre. Voici ce que j'ai trouvé, d'après un état général publié par *Buffon* : depuis 1745 jusques et compris l'année 1766 inclusivement, le *maximum* de la mortalité a eu lieu sept fois en mars, sept fois en avril, trois en mai, deux en janvier, une en novembre et une en décembre. Les mois qui ensuite avaient eu le plus de décès étaient, pour les années où ils n'offraient pas la plus grande mortalité, celui de mars, puis celui d'avril. Le *minimum* de la mortalité avait eu lieu neuf fois en août, quatre en juillet, deux en juin, deux en septembre, deux en novembre, une en décembre et une en février. Les mois qui se trouvaient ensuite les moins chargés étaient ceux de juillet, d'août et de septembre, pour les années où ils n'offraient pas le *minimum*. Ce que je viens de dire ne sera pas d'accord avec les assertions de plusieurs médecins; mais comme les assertions ne reposent point sur des relevés et des calculs, elles sont bien moins certaines. »

M. *Villermé* examine encore plusieurs autres opinions reçues auxquelles il oppose toujours ses résultats numériques; il cite aussi différens résultats qui confirment les siens. Il se trouve enfin amené à cette conclusion, qu'à Paris, comme dans la plus grande partie de l'Europe, l'hiver et le printemps sont les saisons les plus funestes pour les maladies chroniques, tandis que les maladies d'été sont, en général, rarement mortelles (*). LES ÉDITEURS.

(*) *Franklin*, dans ses observations sur la population (vol. II, de ses œuvres, pag. 119) dit : les tables de la proportion des mariages et des morts aux naissances, des mariages au nombre des habitans, etc., dressées pour les grandes villes, ne peuvent s'appliquer aux campagnes.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Académie royale des Sciences et Lettres de Bruxelles.

Le volume des mémoires couronnés 1824 — 1825, vient de paraître : il renferme deux mémoires de M. *Pagani,* nommé depuis membre de l'Académie, et professeur extraordinaire dans la faculté des sciences de l'Université de Louvain : l'un de ces mémoires dont nous allons rendre compte, est en réponse à la question : *on sait que les lignes spiriques ou sections annulaires, sont des courbes formées par l'intersection d'un plan avec la surface du solide engendré par la circonvolution d'un cercle autour d'un axe donné de position; on demande l'équation générale de ces courbes, et une discussion complète de cette équation.* Il a été fait à l'Académie un rapport sur cette pièce, par MM. *Van Hutenhove, Garnier* et *Quetelet,* que l'Académie a cru devoir consigner à la suite du mémoire, sous le titre : *Notice historique sur les courbes spiriques,* et que nous rapporterons ici en son entier, sauf le texte grec. Les courbes qui font l'objet du mémoire en question, paraissent avoir été considérées pour la première fois par un certain *Perseus,* auquel *Proclus* (1) en attribue la découverte. Dans toute l'antiquité, il n'est guère autrement fait mention de ce *Perseus* que dans ce passage de *Proclus. Montucla* lui donne pour patrie la ville de Cittium, dans l'île de Cypres, en l'appelant *Cittieus,* dans la deuxième édition de son histoire des

(1) Comment. in Eucl. Lib. I, Déf. IV, pag. 31, Edit. Bazil, 1533.

mathématiques (1), tandis que, dans la première (2), il l'avait tout simplement nommé *Perseus;* mais il est probable qu'on aura confondu son nom Περσεὺς avec Περσαῖος, *Persœus*, compatriote, domestique et disciple du philosophe *Zenon,* natif de cet endroit, et dont parlent plusieurs auteurs anciens, tels qu'*Athenée* (3), *Pausanias* (4), *Elien* (5), *Ciceron* (6) et autres. Mais quoiqu'une pareille confusion de noms, dont les meilleures éditions d'*Athenée* (7), au sujet du même philosophe, offrent encore un exemple frappant, soit très-possible, il ne paraît cependant pas que *Persœus* fut lui même géomètre, à en juger du moins par ses ouvrages dont *Diogène Laërce* nous a conservé les titres (8). Au sujet des courbes en question, *Montucla* se plaint de ce que tous les géomètres avant lui, sont tombés dans une grossière méprise, en les confondant avec les spirales, quoique *Proclus* les ait désignées assez clairement pour éviter une pareille erreur. Cette remarque de *Montucla* n'a pas garanti le nouveau traducteur anglais de *Proclus*, de la même méprise, en traduisant le plus souvent σπειρικὰς par *spiral lines* (9). Mais il paraît que les savans ont cherché la nature de ces courbes dans l'étymologie et dans la signification du mot σπεῖρα, plutôt que dans la description qu'en a donnée *Proclus*. En effet, le même mot σπεῖρα ou σπείρη, est employé par le poète *Aratus* pour désigner le replis du dragon céleste (10) et du serpent d'Ophiucus (11) : il a été de même adopté dans la langue latine et dans le même sens, par les auteurs du premier ordre. C'est ainsi, par exemple, que *Virgile* employe le mot

---

(1) Tom. I, pag. 316.
(2) Tom. I, pag. 311.
(3) Deipnos, L. 4, c. 8 et 17.
(4) Corinth. C. 8, § 4.
(5) Vor. Hist. L. 3, C. 17, § 32.
(6) De nat. Deor. L. 1, C. 15.
(7) Deipnos. L. 4, C. 8.
(8) L. 7, Sect. 36.
(9) The Phil., and math. comment. of *Proclus* on ti 1.st of *Euclid.* vol. I, pag. 134, 139, 145, etc.
(10) Phænom. V. 47, 50 et 52.
(11) Ibid. V. 89.

spira dans le beau passage de l'Enéide (1) qui paraît avoir inspiré l'artiste à qui l'on doit le fameux groupe connu sous le nom de *Laocoon* : on a formé de ce mot, dans les temps modernes, l'adjectif *spiralis*, dont cependant aucun auteur ancien ne s'est jamais servi, et qui paraît avoir été introduit par le premier traducteur d'*Archimede*, nommé *Petrus Venatorius* (2), pour désigner la courbe célèbre inventée par ce grand géomètre, qu'il a appelée ἕλιξ (3) dans sa propre langue, terme que d'autres traducteurs ont conservé dans la langue latine où *Pline* s'en était servi pour désigner une espèce de lierre (4). C'est donc cette amphibologie dans les termes qui paraît avoir autorisé plusieurs auteurs à traduire également l'adjectif σπειρικὰς par *spirales*, et donné lieu à la confusion dont s'est plaint *Montucla*, confusion que l'on eût facilement évitée, en traduisant ce mot par *annulares*, *annulaires*, par analogie avec les *coniques*, pour désigner les sections d'un anneau, ce qui eût exprimé le véritable sens de *Proclus*. Le même solide avait encore été considéré par quelques modernes (5), mais uniquement dans la vue d'en déterminer le volume, la surface, les segmens et les secteurs, sans s'occuper des courbes engendrées par ses différentes sections par un plan; et ce n'est que *Montucla* qui dit s'en être occupé dans sa jeunesse, mais il n'est pas venu à notre connaissance qu'il ait publié ses recherches sur cette matière. Il semble donc que c'est avec raison que l'Académie a proposé ce sujet de recherches au concours : et si l'on demandait quelle en peut être l'utilité, on répondra que la même question aurait pu être faite dans le temps à *Apollonius*, dont la *Théorie des sections coniques* a pu également être regardée pendant plus de dix-huit siècles, comme une spéculation oiseuse et stérile, jusqu'au temps où *Kepler*, en transportant ces courbes dans l'astronomie, fit ressortir de leurs propriétés ces admirables lois qui régissent le système planétaire. D'ailleurs les sections annulaires ne sont pas sans usage dans les arts; on les emploie même assez fréquemment en architecture, comme ornements :

---

(1) L. 2, V. 217.
(2) Archi. Op. Lat. pag. 98, Ed. Bas, 1544.
(3) Archi. Oper. pag. 217, édit. Oxon. 1792.
(4) Hist. nat. L. 16, C. 35 et 38.
(5) *Repler*, nova stereometria doliorum, Theor. 18. — Tacquet annularia.

par exemple, dans les chapiteaux et dans les bases des colonnes, la *doucine* et le *quart de rond* sont des quarts de surface annulaire, le *boudin* en est une moitié. Les jantes des roues de voiture; les moulures autour des portes en plein ceintre; les vases ronds de forme antique; les voûtes des galeries qui entourent les salles circulaires, offrent de nouveaux exemples de l'emploi des surfaces annulaires que l'on nomme aussi quelque fois *Tores*. M. le physicien *Fresnel* a encore tiré parti des surfaces annulaires dans la composition de ses *lentilles à échelons* pour son nouveau système d'éclairage des *phares*. On peut voir aussi de quelle manière M. *Hachette* a traité ces courbes par la Géométrie descriptive (1) : il donne successivement des méthodes pour traiter les sections du *Tore*, pour lui mener un plan tangent en un point quelconque; pour construire les normales et les rayons de courbure des sections, ainsi que la courbe à double courbure résultant de l'intersection d'un tore et d'une sphère, de deux tores entre eux, etc. Il n'est peut-être pas inutile d'observer que quand la surface annulaire, est engendrée par un cercle dont le diamètre égale le rayon de la circonférence sur laquelle le centre de ce cercle est assujetti à se trouver, et que l'on coupe la surface annulaire par un plan perpendiculaire à celui de la circonférence et mené par le milieu de son rayon, on obtient pour section *la lemniscate* (2), courbe célèbre qui a été traitée pour la première fois par le géomètre *Fagnani*, et qui a été l'objet de recherches intéressantes et utiles faites par M. *Legendre* (3).

Comme les seuls renseignemens qui nous restent sur ces courbes, se trouvent consignés dans le commentaire de *Proclus*, devenu extrêmement rare aujourd'hui, on verra peut-être avec plaisir la traduction des passages qui les concernent (4).

Proclus, Commentar. in Euclid. L. I, pag. 31, *edit. Basil,* 1533.

---

(1) Trait. de Géom. Desc. chez *Corby*, 1822 et 2.e suppl. chez *Firmin Didot*, 1818.

(2) Voyez *Euler* (Introd. tom. II, pag. 303).

(3) Exerc. de Cal. Intég., par *Legendre*, et Cal. Diff. et Intég. de *Lacroix*, v. II, p. 502.

(4) Dans le rapport imprimé, le texte grec et la traduction française sont en regard.

Or, les sections coniques ou les annulaires sont engendrées dans les solides par une telle section (d'un plan). Parmi ces sections, les coniques ont été imaginées par *Menechme,* ainsi que le raconte *Eratosthène,* en disant (1) : *et l'on n'aura plus besoin des trois sections coniques de* MENECHME. Les annulaires sont de l'invention de *Perseus* qui à cette occasion, fit l'épigramme suivante : *Lorsque* Perseus *découvrit les trois lignes annulaires, il se rendit les divinités propices par cette découverte.* Or, les trois sections coniques sont la parabole, l'hyperbole et l'ellipse : mais des annulaires, l'une est impliquée en forme de fer à cheval; l'autre en s'élargissant vers le milieu, se retrécit aux deux extrémités; la troisième enfin étant plus oblongue, occupe un espace plus étroit vers le milieu, tandis qu'elle s'élargit aux deux extrémités.

Ibid. pag. 33.

Or, ce qui est ici surprenant, c'est qu'un mouvement (circulaire) produit souvent une surface mixte, selon la manière dont celle-ci est engendrée; ce que nous affirmons être le cas de la surface annulaire : car celle-ci se conçoit comme engendrée par la révolution d'un cercle dont le plan reste constamment vertical, autour d'un point fixe qui n'est pas son centre. Ainsi l'anneau ou la spire se forme de trois manières différentes : en effet, ou le point fixe est situé sur la circonférence (du cercle tournant) ou en dedans ou en dehors. Dans le premier cas, on a la spire continue (formée par le mouvement du cercle autour d'une tangente) : dans le second, la spire impliquée (2) : enfin dans le troisième, la spire discontinue (ou l'anneau ouvert). Cependant toute spire, bien qu'elle soit un corps continu, produit par un mouvement circulaire, est toujours un corps mixte (3).

---

(1) In *Mesolabo,* ouvrage qui nous a été conservé en entier par *Eutocius,* ad Archim. de Sph. et Cylind., L. 2, pr. 2, pag. 144, Ed. Oxon. C'est la description d'un instrument propre à prendre deux moyennes proportionnelles, et que le roi *Ptolomée* pouvait, dit-il, se faire construire soit en bois, soit en ivoire, soit en or, ce qui dispensait d'avoir recours aux sections coniques de *Menechme.*

(2) Espèce de *bourrelet* produit par la révolution d'un segment circulaire autour de sa corde.

(3) C'est ainsi que *Proclus* appelle toute ligne qui n'est ni droite ni circulaire, et toute surface qui n'est ni plane ni sphérique : à la vérité, ses raison-

Passons au mémoire de M. *Pagani* : la question proposée par l'Académie, en renferme deux : 1.° l'équation générale des lignes spiriques : 2.° une discusion complète de cette équation. En désignant par R le rayon du cercle générateur de la surface annulaire, par R′ la distance du centre de ce cercle à l'axe de circonvolution, par θ l'angle formé par cet axe avec celui des x, par a la distance du plan coupant à celui des (xy), l'auteur a trouvé que les sections annulaires sont représentées par cette équation du quatrième degré

$$(y^2+x^2+a^2-R^2-R'^2)^2=4R'^2\,[R^2-(a\sin.\theta+x\cos.\theta)^2];$$

les deux quantités R et R′ peuvent avoir des valeurs positives quelconques; l'angle θ peut varier entre 0° et 90°, et la constante a doit toujours être comprise entre 0 et R′ cos. θ + R. Ces surfaces peuvent être divisées en trois classes qui ont pour caractères

1.re .... $a<R'\cos.\theta-R$
2.e .... $a>\pm(R'\cos.\theta-R)$
3.e .... $a<R-R'\cos.\theta$

Chacune de ces classes offre des variétés que l'auteur a soigneusement assignées.

Almanak ter dienste der zeelieden, Almanach à l'usage des marins, pour les années 1826 et 1827, 2 vol. in-8.°, à La Haye, de l'imprimerie de l'état, 1825.

Cet ouvrage rédigé à-peu-près sur le même plan que la *Connaissance des temps*, publié par le bureau des longitudes de France, paraît depuis l'année 1788. Il est composé par une commission chargée de l'examen des officiers de marine, de la révision des cartes hydrographiques et généralement de tout ce qui concerne la détermination des longitudes en mer.

---

nemens sont pitoyables : et son seul mérite consiste dans les renseignemens historiques répandus dans ses commentaires, et qu'on chercherait inutilement ailleurs.

La première partie renferme pour les différens jours du mois, l'équation du temps; l'ascension droite et la déclinaison du soleil et de la lune; les diamètres apparens de ces astres; la distance de la lune aux principales étoiles; les lieux de Vénus, de Mars, de Saturne, de Jupiter; les configurations des satellites de cette dernière planète; les époques des éclipses de ces mêmes satellites, etc. Il est inutile d'ajouter qu'on trouve dans le même ouvrage tous les renseignemens possibles sur les éclipses de soleil et de lune, qui doivent avoir lieu dans le cours de l'année.

La seconde partie de l'Almanach à l'usage des marins, renferme des avis et des notices sur des sujets intéressans pour la navigation. C'est, pour ainsi dire, le complément de tout ce qui est contenu dans la première partie de l'ouvrage. On doit au zèle infatigable de M. *Schröder*, professeur à l'Université d'Utrecht et président de la commission, presque toute la partie complémentaire qui a paru dans les volumes de 1826 et 1827. Ce sont des tables très-étendues de la déclinaison de l'aiguille aimantée hors des tropiques, dont les données ont été puisées dans un grand nombre d'ouvrages des voyageurs les plus illustres, tels que *Cook*, *Lapérouse*, *Krusenstern*, *D'Entrecasteaux*, *Vancouver*, *Parry*, etc. : des avis sur les fanaux placés le long de la côte de la Hollande, de la Zélande et de la Flandre-Occidentale, ainsi qu'autour de la rade de Batavia; des tables des courans observés pendant un voyage à Batavia; des analyses des recherehes de *Davy* et de *Barlow* sur les actions chimiques des métaux et sur l'isolement de l'aiguille aimantée à bord des vaisseaux : enfin on trouve encore dans le même ouvrage des recherches très-intéressantes sur les relevés hydrographiques du golfe de Mexique, de la Terre-Ferme, et des îles des Indes-Occidentales faites par des officiers Espagnols, ainsi que des renseignemens sur la méthode d'après laquelle la carte hydrographique des passes des bouches de l'Escaut, a été levée en 1823 et 1824 par le capitaine-lieutenant *J. C. Ryk*. A la fin du volume pour 1826, ont été ajoutés les élémens de la grande triangulation du général *Krayenhof*, qui occupent environ 70 pages; les déterminations de quelques points situés dans les eaux de Java et des îles Moluques, d'après les observations du capitaine *Dejager*, comparées à celles de MM. *Vaillant*, *Melvil*, *Koopman*, *Feteris*, etc. On peut voir par le simple énoncé que nous

venons de faire des principaux articles insérés dans l'Almanach des marins, combien ce recueil est varié et quels sont les services importans qu'il peut rendre à la navigation. Il serait donc à désirer qu'il fut plus généralement connu à l'étranger et même dans nos provinces méridionales où la partie supplémentaire pourrait offrir une lecture utile et intéressante aux personnes mêmes étrangères aux connaissances scientifiques.

A. Q.

Beginselen der differentiaal-integraal en variatie-rekening. Principes du calcul différentiel et intégral et du calcul des variations, par M. De Gelder, professeur à l'Université de Leyde. A La Haye, 1823, chez les frères *Van Cleef*, in-8.°, 516 pages (1).

M. *De Gelder*, déjà très-avantageusement connu par un grand nombre d'ouvrages hollandais sur les mathématiques, s'occupe en ce moment de la publication d'un Traité complet de Calcul différentiel et intégral. Le premier volume qui vient de paraître contient l'exposition du Calcul différentiel. L'auteur a suivi une méthode qui lui est particulière : c'est en partant du calcul des différences, dont il pose d'abord les principes, qu'il s'élève ensuite aux résultats connus : le chemin que j'ai suivi, dit-il, me paraît naturel, parce que, sans l'embarras de mots étrangers et de considérations nouvelles, d'après la forme nécessaire du développement des différences des fonctions, j'ai démontré, *à priori*, par des raisonnemens fort simples et habituellement usités, le passage de l'état des différences à celui des différentielles. Je démontre encore, ajoute-t-il, sans le secours des fluxions,

(1) J'avais inséré cette annonce dans le cahier de la *Revue encyclopédique*, pour le mois de septembre 1824; je la reprend ici, parce que je ne pense pas que les journaux de nos provinces méridionales aient déjà fait connaître l'ouvrage de M. *De Gelder*, qui mérite cependant d'être cité sous plus d'un rapport.

des infiniment petits, des limites ou d'autres considérations étrangères au sujet, que la théorie des tangentes, des rayons de courbure, des quadratures, des rectifications, des centres de gravité, etc., peut être déduite de la considération seule du passage des différences de leur état positif à leur état négatif. L'auteur à éclairci sa méthode par la solution d'un grand nombre de problêmes dont le choix nous a paru fort heureux. — Le besoin d'un bon Traité de calcul différentiel et intégral, écrit en Hollandais, se faisait sentir depuis long-temps aux personnes, qui, peu familiarisées avec les langues étrangères, aimaient à se mettre au courant des découvertes modernes. Nous pensons que l'ouvrage de M. *De Gelder* ne devra leur laisser rien à désirer. Il est écrit avec une grande clarté et contient, en plusieurs endroits, des apperçus nouveaux et des développemens heureux. M. *De Gelder* montre surtout de la sagacité dans la manière dont il lève certaines difficultés de construction. Il avait déjà donné ses preuves de cette sagacité dans un *Essai sur la nature des quantités positives et négatives en algèbre et sur leur interprétation géométrique.* (Proeve over den waren aard van den positiven en negatieven toestand der grootheden, etc.) Malheureusement, cet ouvrage dont il n'existe aucune traduction, n'est pas aussi connu qu'il mériterait de l'être (1).

A. Q.

M. *Van Marum,* dont le nom est très-honorablement connu dans les sciences physiques, vient de publier le catalogue de la bibliothèque de la fondation Teylérienne, de Harlem. M. *Van Marum,* dès l'origine du musée de Teyler, qui remonte à l'année 1784, avait été invité par les directeurs à faire les collections d'instrumens de physique et d'objets d'histoire naturelle; l'on sait qu'il s'est acquitté de cette tache avec autant de zèle que de talent. L'ouvrage qu'il publie aujourd'hui, a pour but de faire connaître aux savans, les richesses que renferme le musée dont il est le premier bibliothécaire. Les

---

(1) Voyez le premier vol. de la *Corresp. math.,* page 290.

amateurs y trouveront avec plaisir une riche collection d'auteurs grecs et latins, ainsi que des éditions précieuses d'ouvrages concernant les différentes branches de l'histoire naturelle, la géologie, la géographie, les voyages, et, ce qui est surtout d'une utilité majeure dans un établissement public, une collection à-peu-près complète des mémoires académiques des différens pays. Nous avons remarqué néanmoins avec surprise qu'au milieu de tant d'ouvrages utiles, il s'en trouvât si peu sur les science physiques et mathématiques : cela tient probablement à des motifs particuliers dépendans de l'organisation intérieure du musée.

L'Académie royale de Berlin a publié son nouveau recueil de mémoires pour l'année 1822 à 1823 : la partie des sciences contient plusieurs mémoires sur l'histoire naturelle par MM. *Lichtenstein*, *Mitscherlich*, *Karsten*, *Buch*, *Link*; des recherches sur les volcans dans les différentes régions du globe, par M. *A. Humboldt*, et des applications mathématiques à la cristallographie par M. *Weiss*. M. *Fischer* a donné des recherches sur les oscillations des cordes tendues; il propose à cet effet un instrument nouveau dont il donne le dessin et la description. Pour le nombre de vibrations (n) dans une seconde, on a la formule

$$n = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{2g\lambda P}{\gamma}}$$

M. *Fischer* pose d'abord d'une manière générale les valeurs

$$2g = 375;\ \lambda = 50;\ P = 480;\ \gamma = 0{,}0889$$

de sorte que ce qui est sous le radical, demeure invariable dans toutes les recherches; et sa valeur par les logarithmes devient

$$\log.\sqrt{\frac{2g.\lambda.P}{\gamma}} = \log.\sqrt{\frac{375\times50\times480}{0{,}0889}} = 4{,}0053407.$$

d'où

$$\log.\ n = 4{,}0053407 - \log.\ L$$

Reste maintenant à déterminer la valeur de L, pour chaque diapason sur les différens théâtres. M. *Fischer* trouve par sa méthode, les résultats suivans :

DIAPASONS.	Valeur de L, ou longueur en pouces.	Valeur de n, ou oscillations par 1″.
Du théâtre de Berlin...	23,008	437
Du grand opéra de Paris.	23,307	431
Du théâtre Feydeau...	23,530	428
Du théâtre Italien.....	23,712	424

M. *Seebeck*, surtout connu par ses belles expériences thermo-électriques, est revenu sur le même sujet; et dans un mémoire fort étendu, il fait connaître une foule de recherches et d'observations nouvelles que nous regrettons de ne pouvoir analyser ici.

Il vient de sortir des presses de M. *Hayez, un tableau chimique* d'une grande dimension, où l'on a tronvé moyen de réunir les résultats les plus usuels, tels que les *nombres proportionnels* qui indiquent le rapport dans lequel les différentes substances peuvent se combiner; les propriétés principales des corps métalliques et non-métalliques; les époques des découvertes des différens métaux; les degrés de fusibilité, etc. Ce tableau par ses grandes dimensions offrait, quant à l'exécution typographique, de nombreuses difficultés dont M. *Hayez* a heureusement triomphé : on peut même citer ce tableau comme un modèle en son genre.

Nous avons déjà annoncé dans nos cahiers précédens, plusieurs ouvrages élémentaires sur les sciences, qui ont été successivement publiés par M. *P. J. De Mat.* Ce typographe infatigable vient d'ajouter encore à la collection qu'il forme, une nouvelle édition de la *Chimie,* par M. *Payen.* Cet ouvrage d'un homme avantageusement connu dans les sciences, ne peut manquer d'être recherché par les gens du monde qui veulent prendre connaissance des élémens d'une science qui a fait faire, en peu de temps, des pas si rapides à l'industrie. Nous ne répéterons pas ici les éloges que les journaux ont

accordés à cet ouvrage dès sa naissance ; nous nous bornerons à observer que l'auteur a senti le besoin d'exposer en détail la partie de la science qui se rattache le plus aux différens arts et qui peut piquer le plus la curiosité. On lira surtout avec intérêt la vingtième leçon sur les substances végétales, sur les fonctions de leurs organes et sur l'ensemble des phénomènes de la nutrition : les leçons suivantes qui ont pour objet l'examen des produits des végétaux, ne sont pas moins intéressantes. Tout ce qui concerne le gaz hydrogène et ses différens usages, se trouve également exposé de manière à amuser le lecteur.

Un nouveau Journal scientifique et littéraire vient de paraître à Bruxelles, sous le titre d'*Annales universelles* des arts industriels et des nouvelles inventions, des sciences physiques et morales, de la littérature et des beaux-arts. Il s'imprime par cahiers in-8.° de 150 à 200 pages, avec planches et est destiné à paraître mensuellement au prix de 36 fr. par an et 4 fr. par mois. « Ce recueil, comme l'annonce l'éditeur, ne sera qu'un choix de ce que tous les autres renferment de *meilleur* : son étendue permettra même d'y comprendre tout ce que ceux-ci ont de bon ». Beaucoup de journaux, dans leur intérêt, seront peut-être portés à décliner la compétence de ce nouveau tribunal. Nous ne pensons cependant pas que ce soit la *Revue encyclopédique* qui a fourni une grande partie des matériaux. Mais que diront les éditeurs de la plupart des journaux littéraires et scientifiques qui se publient en Allemagne, de la *Correspondance astronomique*, des *Annales mathématiques de Nîmes*, etc., qui ne se trouvent pas même nommés, sans que pour cela ils méritent moins de l'être ? Notre observation paraîtra sans doute désintéressée puisque notre journal est à-peu-près le seul de notre royaume qui s'y trouve mentionné. Notre intention dans les remarques précédentes est de faire mieux sentir la tâche difficile que l'éditeur des *Annales universelles*, s'est imposée; et certes s'il n'a consulté que les besoins et les goûts des gens du monde qui désirent de s'instruire, il ne pouvait mieux débuter. Parmi les articles les plus importans nous avons surtout remarqué un long extrait d'un rapport fait à l'Institut de France sur la construction des paratonnerres, des articles sur l'in-

vention des bateaux à vapeur, sur les ponts suspendus, sur l'art d'incruster le verre, sur le cuir et le suif artificiels, sur l'éducation des classes inférieures et supérieures, etc., etc. Le coup-d'œil sur l'état actuel des sciences et des arts et sur les progrès des peuples depuis le commencement du 19.e siècle, est un extrait fait avec discernement des excellens discours de MM. *Sismondi, Benjamin Constant* et *Julien,* qui se trouvent dans la *Revue encyclopédique.* Travaillant dans l'intérêt seul des sciences, nous désirons bien sincèrement que les *Annales universelles* obtiennent du succès et nous nous ferons toujours un véritable plaisir de le signaler. A. Q.

Nous avons appris avec les sentimens de la plus vive reconnaissance, que Sa Majesté qui compte les années de son règne par les monumens utiles qu'elle fonde, vient par un décret du 8 juin dernier, d'ordonner la formation d'un observatoire à Bruxelles. Ce nouveau bienfait qui sera sans doute apprécié par tous les amis des sciences, enrichit nos provinces méridionales d'un établissement qui leur devenait d'autant plus nécessaire, qu'elles n'en avaient jamais possédé de semblable. Depuis long-temps l'amour des sciences m'avait porté personnellement à faire auprès du gouvernement des sollicitations pressantes pour cet objet (1); et, grâce à l'heureuse entremise de S. Exc. le ministre de l'intérieur et de M. *Van Ewyck,* administrateur-général de l'instruction, ces sollicitations ont été couronnées d'un succès d'autant plus flatteur qu'on a bien voulu me confier le soin de faire les plans de l'Observatoire et de m'entendre à ce sujet avec M. *Walter,* inspecteur-général de l'instruction publique, à qui je dois également les plus grands remercîmens pour le zèle avec lequel il a bien voulu s'intéresser à mes démarches.

La régence de Bruxelles a désiré prendre part aux frais de construction de l'observatoire et a généreusement offert de donner un terrain propre à l'emplacement de l'édifice. Un aussi heureux accord entre le gouvernement et les villes, quand il s'agit de l'intérêt commun, présente un spectacle bien satisfaisant dont malheureusement peu de pays jouissent aujourd'hui. A. Q.

---

(1) Voyez le premier vol. de la *Corresp. math. et phys.*, pag. 67.

M. *Lemaire*, docteur ès sciences à l'Université de Gand, ancien professeur de mathématiques au Collége royal de la même ville et chargé depuis de l'enseignement supérieur des mathématiques à l'Athénée royal de Tournay, ayant été appelé par Sa Majesté aux fonctions de professeur extraordinaire dans la faculté des sciences de l'Université de Gand, a prononcé son discours inaugural, en cette qualité, le 16 juin dernier. Chargé spécialement des cours de Géométrie et de Mécanique appliquées aux arts, dans l'Ecole des arts et métiers qu'on est à la veille d'établir à Gand, il en a pris l'occasion de signaler comme un fruit du progrès des saines idées et de la bonne philosophie, l'arrêté du Roi, qui en rattachant la nouvelle Ecole à une Université, semble avoir voulu consacrer ainsi l'heureuse union de toutes les connaissances qui contribuant également au bonheur des hommes, ont également droit à leur considération. On sait qu'*Archimède*, profond géomètre et mécanicien ingénieux, n'estima que les découvertes qu'il avait faites en théorie et ne jugea pas à propos de transmettre à la postérité les nombreuses inventions mécaniques qui lui méritèrent l'admiration de ses contemporains. Aujourd'hui on est d'accord avec lui, comme on l'a toujours été, comme on le sera toujours, sur la prééminence qui appartient aux spéculations mathématiques d'un certain ordre, sur leur application aux besoins de la société; mais on ne l'est pas sur les motifs qui, suivant *Plutarque* (1), faisaient pencher la balance en faveur des premières chez les anciens : on ne voit plus rien de vil dans ce qui peut contribuer au bonheur des hommes, et, comme l'a remarqué M. *Lemaire*, la dénomination même d'*arts libéraux* commence à tomber en désuétude.

La géométrie et le dessin formant avec la mécanique la partie mathématique de l'enseignement dans une Ecole d'arts et métiers, l'orateur s'est particulièrement étendu sur ces matières, et à propos de la géométrie descriptive, il a considéré comme un heureux supplément de ses procédés pour la classe nombreuse des personnes qui ne peuvent acquérir les connaissances nécessaires pour les compren-

(1) « (*Archimède*) réputant toute cette science d'inventer et composer machines, » et généralement tout art qui apporte quelqu'utilité à la mettre en usage, » vile, basse et mercenaire, il employa son esprit et son étude à écrire seulement choses dont la beauté et subtilité ne fût aucunement mêlée avec nécessité. » *Plutarque*, traduction d'*Amyot*.

dre, le dessin linéaire qui, introduit depuis long-temps dans les Ecoles de *Pestalozzi*, devrait l'être dans toutes celles que fréquente la classe laborieuse de la société. M. *Lemaire* a proposé comme exemple, à cet égard, ce qui a été fait tout récemment en France, par MM. *Francœur* et autres, et a vivement engagé ses concitoyens à marcher sur des traces si honorables (1). J. G. G.

Le docteur *Lehman*, jeune savant qui se voue avec zèle à l'étude des mathématiques et de l'astronomie, dans une dissertation inaugurale à l'Université de Gœttingen, émet une nouvelle idée sur la formation des queues des comètes : il se propose de rechercher si l'on ne peut pas, au moyen des forces connues et des lois de la mécanique, expliquer la forme des queues des comètes et leurs changemens, comme on explique au moyen de la gravitation seule, le flux et le reflux de la mer. Il peut, dit-il, se présenter deux cas à l'égard de la révolution des comètes autour de leur axe; cette révolution, comme celle des planètes, peut s'accomplir de manière qu'elles présentent au soleil, toutes les parties de leur surface; où à la manière des satellites, elles tournent toujours le même hémisphère vers cet astre, parce que la masse est plus grande dans cette partie, comme il arrive de celle de l'hémisphère que la lune nous présente. Dans le premier cas, la comète ne peut avoir une queue et conséquemment elle n'en admet que dans le second. Sachant donc que quelques comètes ne montrent aucune trace de queue, tandis que d'autres en acquièrent une aux environs de leur périhélie, on peut en inférer, dit M. *Lehman*, que les premières tournent à la manière des planètes et les secondes à la manières des satellites. Dans ce dernier cas, après avoir réduit à trois les forces accélératrices qui agissent sur l'atmosphère de la comète, savoir la force d'expansion, la gravitation vers le soleil et la gravitation vers le noyau qui est très-peu dense dans les comètes, forces

---

(1) M. *Lemaire* nous écrit de Tournay, que M. *Renard*, architecte de la régence de cette ville, sur l'invitation de M. *Lehon*, membre des états-généraux, vient d'établir avec le plus grand succès dans l'Académie de dessin et dans l'Ecole d'enseignement mutuel, des cours de dessin linéaire, avec des développemens nouveaux dont l'idée lui appartient.

qu'il décompose chacune en deux autres rectangulaires entre elles, il ne considère que les trois qui agissent dans le sens du rayon vecteur, et il suit leur action d'abord sur les parties de l'atmosphère, situées du côté opposé au soleil, puis sur celles qui sont du côté de cet astre; et comme il n'y a aucune différence essentielle entre ces deux régions de la comète, il doit, dit-il, se former une queue aussi bien d'un côté que de l'autre. Pourquoi donc en observons-nous une seulement sur l'hémisphère opposée? parce que le centre de gravité du noyau, ne coïncide pas avec son centre de figure, mais qu'il est situé beaucoup plus près de la surface de l'hémisphère tourné vers le soleil : il explique comment la queue est infléchie, de manière qu'elle tourne sa concavité vers le côté d'où vient la comète, et que le plan de sa courbure coïncide avec celui de l'orbite de l'astre. Il conclut enfin qu'on peut considérer la formation et les changemens des queues des comètes, comme une espèce de flux et de reflux de l'atmosphère de ces astres, absolument semblable aux marées que la lune détermine dans notre océan, et peut-être dans notre atmosphère même. M. *Lehman* ne suppose qu'une seule queue : mais celle de la comète de 1811, se composait de deux branches infléchies en sens contraire, et la comète de 1823 avait deux queues presque diamétralement opposées. D'ailleurs peu de comètes jusqu'ici ont offert un disque bien distinct, et ce n'est qu'avec un très-fort télescope qu'*Herschel* parvint à voir dans le noyau de celle de 1811, un point brillant qu'il jugea être le disque même de l'astre; il est donc très-difficile de constater les phases que les comètes peuvent présenter. L'existence de ces phases, établirait incontestablement que les comètes sont des corps opaques qui réfléchissent la lumière solaire comme les planètes. Pour éclaircir cette question, il serait important de pouvoir observer le passage de quelques grandes comètes sur le disque du soleil; car, dans le cas d'opacité, le noyau sous-tendant un angle sensible, se montrerait comme une tache obscure; et dans celui de la diaphanéité, la comète traversée par la vive lumière du soleil, ne serait probablement pas visible. Ce phénomène intéressant et rare s'est présenté à l'égard de la comète de juillet 1819, dont les élémens de l'orbite ont été calculés par M. *Olbers;* mais le passage sur le soleil ayant eu lieu plusieurs jours avant l'apparition de l'astre, les Astronomes n'ont pu l'observer. Ainsi la question sur la

nature de la lumière des comètes, reste encore indécise. Les phénomènes récemment découverts et désignés par les physiciens sous le nom de *polarisation,* fourniront peut-être un jour le moyen de la décider. Le 3 juillet, jour de la première apparition de la comète de 1819, à Paris, M. *Arago* soumit la lumière de cet astre à cette épreuve, et reconnut qu'elle présentait quelques traces de polarisation (Ann. de Chimie, tom. XIII, janvier 1820). MM. *Humbolt, Bouvard, Mathieu* et *Nicolet* prirent part à ces expériences et arrivèrent de leur côté au même résultat : elles tendent donc à prouver que la comète n'était pas lumineuse par elle-même, et qu'elle réfléchissait les rayons du soleil, conclusion qu'il ne faut cependant regarder que comme une probabilité, jusqu'à ce que de nouvelles expériences viennent la confirmer. J. G. G.

Nous apprenons que M. *Arago*, dans une dernière séance de l'Institut, a annoncé une nouvelle expérience sur le magnétisme par rotation, qui n'est pas moins étonnante que celle dont nous avons parlé dans notre cahier précédent. Ce savant suspend par des tourillons l'aiguille aimantée dans une position verticale et perpendiculaire au plateau qui tourne. Quand la direction de l'aiguille passe par le centre du plateau, on n'observe aucune déviation; à une petite distance du centre, l'aiguille dévie et tend à se rapprocher du centre. La déviation devient encore une fois nulle, quand la direction de l'aiguille passe par un point qui est au tiers du rayon du cercle tournant; passé ce point, la déviation se renouvelle, mais cette fois dans un sens opposé et l'aiguille est rejetée vers les bords du plateau. M. *Hachette,* dans une lettre particulière, nous annonce depuis que M. *Poisson* doit lire, lundi 12 juillet, à l'Académie des sciences, un mémoire d'analyse sur les phénomènes magnétiques et particulièrement sur ceux qui ont été observés par M. *Arago*. M. *Hachette* est porté à croire que ce genre de phénomènes rotatifs, n'est pas très-différent de ce qui se passe lorsqu'on fait tourner un disque métallique contre un autre disque pour produire de l'électricité. On peut voir ce que ce savant a écrit à ce sujet dans les *Annales de Chimie,* tome 49, année 1804, pages 45-54. On y verra qu'un disque faiblement électrisé, se charge en peu de temps

par sa rotation contre un autre disque, d'une électricité étincellante. On pourrait varier cette expérience en changeant la grandeur des disques ainsi que leurs positions respectives et voir dans quelles circonstances on obtient le maximum d'intensité électrique. A. Q.

Dans un moment où on multiplié avec raison les Ecoles d'industrie et de sciences appliquées aux arts, on n'apprendra pas sans intérêt que deux hommes dont les vues profondes étaient prodigieusement en avant de leur siècle, et devaient par cela seul paraître inexécutables à leurs contemporains, *Henri IV* et ensuite *Descartes* avaient conçu la fondation d'un musée d'industrie. Leurs projets consistaient à bâtir dans un Collége ou ailleurs, diverses grandes salles destinées à chaque corps de métiers, et y joindre un cabinet rempli des instrumens, machines et outils nécessaires à chaque profession; à faire des fonds suffisans non-seulement pour fournir aux dépenses que pouvaient entraîner les expériences, mais encore pour entretenir des maîtres et des professeurs habiles, en nombre égal à celui des arts qu'on y aurait enseignés. Une aussi grande conception était trop prématurée, même au temps de *Descartes*, pour qu'elle fût prise en considération. (*Encycl. moderne.*)

J. G. G.

Il vient de paraître à Berlin, chez les libraires *Duncker* et *Humblot*, un *Journal pour les mathématiques pures et appliquées*, publié par *A. L. Crelle* : la première livraison contient des articles de MM. *Eytelwein*, *Abel*, *Olivier*, *Dirksen*, *Lehmus* et de l'éditeur. Quatre livraisons paraîtront par an et composeront un volume. — *Neu berechneten tafeln zur verwandlung der længen-und hoolmaasses*, Tables nouvelles pour la réduction des mesures de longueur et de capacité, ainsi que des poids et de la monnaie en usage dans les principaux pays de l'Europe, par *F. Lœhmann*, in-4.° en huit parties; à Leipsig, 1822. Ce grand ouvrage doit avoir exigé d'immenses recherches. L'auteur a eu soin de puiser ses documens aux meilleurs sources;

il s'est adressé aux gouverneurs mêmes pour s'en procurer. Afin de rendre son ouvrage d'une utilité plus grande, il a eu soin de donner le texte en Allemand et en Français. Outre les mesures ordinaires, on y trouve tout ce qui concerne les mesures employées dans l'artillerie des différens pays de l'Europe, dans les monnaies, les officines, etc., ainsi que des tableaux comparatifs des mesures employées chez les anciens. — M. *Eytelwein* avait publié dans les Mémoires de Berlin, des *recherches sur le mouvement de l'eau,* en ayant égard à la contraction qui a lieu au passage par différens orifices, et à la résistance qui retarde le mouvement le long des parois des vases. Il vient de paraître chez M. *Huzard,* à Paris, une traduction de cet excellent mémoire avec des notes fort intéressantes par M. *Hachette.* Ce dernier géomètre cite surtout à l'appui des calculs de M. *Eytelwein,* les expériences de M. *Bidone,* de Turin, et celles du savant *Venturoli,* président de l'Ecole des ponts et chaussées à Rome.

A. Q.

Le portrait de l'illustre *Monge,* peint par *Naigeon,* et placé avec le recueil de ses ouvrages dans la bibliothèque de Beaune, sa ville natale, vient de recevoir un second outrage : en 1815, un des premiers magistrats de cette ville, le fit descendre et ordonna qu'on le tint à sa disposition; ce n'était probablement pas pour le faire restaurer : mais une des filles de ce grand homme, réclama l'image de son père qui lui fut rendue. En 1819, sous l'administration de M. le préfet *Girardin,* le portrait fut replacé à la bibliothèque où il devait essuyer une nouvelle déchéance : elle arriva en 1826 par les soins de M. le marquis d'*Arbaud-Jouques* qui donna l'ordre de le faire enlever et de lui chercher une place ailleurs : on ne dit pas si l'intention du noble marquis, est de le remplacer par un *Escobar,* un *Molina,* un *Ignace de Loyola,* un etc. Le préfet joue ici à coup-sûr : d'un côté il ne craint pas qu'on rende la pareille à son image, au moins en tant qu'elle serait dans une bibliothèque publique, et de l'autre il peut espérer que ce beau zèle lui vaudra une préfecture plus lucrative. On n'oubliera pas que le créateur de la *Géométrie descriptive,* celui dont *Lagrange* disait : *il ne nous*

laissera rien à trouver, a été rayé de la liste des membres de l'Institut; on n'oubliera pas non plus que ses compatriotes du département de la Côte-d'Or, *Guyton de Morveau,* le médecin *Chaussier, Carnot* et *Prieur,* fondateurs de l'Ecole polytechnique, n'ont pas eu à se louer de la restauration, et que, dans ces derniers temps, le Géomètre *Legendre* a été jugé n'avoir plus besoin d'une pension de trois mille francs que lui faisait le gouvernement. *O tempora, o mores!*

J. G. G.

Questions à résoudre.

1.° Etant donné un demi-cercle, si on divise son diamètre en deux parties quelconques, si sur chacune d'elles on décrit un demi-cercle et qu'on leur mène une tangente commune, la surface du cercle décrit sur cette tangente limitée aux points de contact, équivaut à l'aire comprise entre les trois demi-cercles.

2.° Si l'on assujettit une courbe du second degré à passer par quatre points donnés, et si d'un point quelconque on mène une tangente à cette courbe, et à toutes celles qui passeront par ces quatre points, tous les points de contact se trouveront en ligne droite.

3.° Quelque soit le nombre m, on a toujours

$$m = 2^{m-1} - (m-2)\,2^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\,.\,2^{m-5} + \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}\,.\,2^{m-7} + \text{etc.}$$

pourvu qu'on s'arrête au premier terme nul.

4.° Soit AB un plan mobile autour d'un axe horizontal O : tandis que ce plan oscille uniformément autour de cet axe, un corps m soumis à l'action de la pesanteur, glisse le long de ce plan : démontrer que la courbe que décrit le point, est une cycloïde.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Sur le rapport de la circonférence au diamètre.

M. *Verdam,* lecteur à l'Université de Groningue, m'a communiqué la construction suivante qui donne le rapport de la circonférence au diamètre, exact jusqu'aux dix-millièmes; il m'a dit la tenir de M. *De Gelder,* professeur à Leyden : au reste de quelque part quelle vienne, elle nous a paru se recommander par son extrême simplicité : je me suis empressé de la consigner dans la seconde édition de mes *Elementa Arithmeticæ, Algebræ et Geometriæ,* qui vient de paraître (*).

Sur la circonférence du centre O (*fig.* 63) et du rayon OB $=1$, on prend un arc B*c* de 30°, ce qui n'exige que la division en deux parties égales de l'arc de 60° que soustend le rayon; on mène la tangente BC; par l'autre extrémité A du diamètre BOA, une tangente indéfinie sur laquelle, et à partir de A, on porte trois fois le rayon OB; par C, on mène la parallèle CE à BA; on joint C et D, et la droite CD représente la demi-circonférence, ou plutôt son rap-

(*) On la trouve chez M. *Vandekerckhove,* imprimeur de la *Correspondance.*



port avec le rayon. Le triangle DCE, rectangle en E, donne

$$DC = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{CE}^2} = \sqrt{[(DA - CB)^2 + \overline{CE}^2]}$$

or, $BC = \text{tang. } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $CE = 2$; donc

$$DC = \sqrt{\left[\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\right]} = \sqrt{[(2,42265)^2 + 4]}$$

$$= \sqrt{9,86923} = 3,14153$$

rapport exact dans les dix-millièmes, puisqu'il ne diffère pas de sept-cent-millièmes du rapport donné avec 35 décimales. Nous ne connaissons aucune construction plus simple et qui à cet avantage réunisse celui de conduire à un rapport aussi approchant : ce qu'il y avait de mieux jusque là, à notre connaissance, était la construction de M. *Quetelet*, qui donne un résultat exact dans les millièmes (*Corresp.* tom. I, pag. 253 et 254).

Les expressions suivantes dans lesquelles D dénote le diamètre et R le rayon, sont encore très-bien appropriées à la pratique :

$$\text{aire du cercle} = D \times \tfrac{7}{9} D$$
$$\tfrac{1}{2} \text{ aire du cercle} = R \times \tfrac{7}{9} D$$
$$\tfrac{1}{4} \text{ aire du cercle} = R \times \tfrac{7}{9} R$$
$$\text{surf. de la sph.} = D \left(3 + \tfrac{1}{9}\right) D$$
$$\tfrac{1}{2} \text{ surf. de la sph.} = D \left(3 + \tfrac{1}{9}\right) R$$
$$\tfrac{1}{4} \text{ surf. de la sph.} = R \left(3 + \tfrac{1}{9}\right) R$$
$$\text{vol. de la sph.} = D \times \tfrac{7}{9} D \times \tfrac{2}{3} D$$
$$\tfrac{1}{2} \text{ vol. de la sph.} = D \times \tfrac{7}{9} D \times \tfrac{2}{3} R$$
$$\tfrac{1}{4} \text{ vol. de la sph.} = D \times \tfrac{7}{9} R \times \tfrac{2}{3} R$$
$$\tfrac{1}{8} \text{ vol. de la sph.} = R \times \tfrac{7}{9} R \times \tfrac{2}{3} R.$$

Elles reposent sur le rapport 3,1 de la circonférence au diamètre, rapport qui n'est exact que dans le chiffre des dixièmes.

J. G. G.

Solution du problème 1.° proposé vol. II de la Corresp., *page* 256; *par* J. B. Groetaers, *élève à l'Athénée royal de Bruxelles.*

Soient AB la droite donnée (*fig.* 64), et C le point qui partage la droite en deux parties quelconques.

Puisque la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure, on aura les proportions suivantes :

$$CD : DF = DF : AD \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$
$$BD : DE = DE : CD \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

De ces proportions on tire

$$CD - BD : DF - DE :: DF - DE : AD - CD \ldots (c)$$

ou

$$BC : EF = EF : AC \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

ce qui fait voir que la portion de la tangente, comprise entre les points de contact, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la droite AB. En désignant par S, S′, S″ et S‴ les aires des demi-cercles décrits sur les droites AB, AC, BC et EF, on a par un théorème connu,

$$S : S' : S'' : 2S''' = \overline{AB}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 : 2\overline{EF}^2,$$

d'où l'on tire

$$S - S' - S'' : 2S''' = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 : 2\overline{EF}^2.$$

On s'assure que $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 2\overline{EF}^2$, en mettant au lieu de $\overline{AB}^2$ sa valeur $(AC + BC)^2 = \overline{AC}^2 + 2AC \times BC + \overline{BC}^2$, et en observant, d'après ce que nous avons démontré plus haut, que $2AC \times BC = 2\overline{EF}^2$; donc

$$S - S' - S'' = 2S''',$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

On remarquera que le cercle décrit sur CG comme diamètre, est égal au cercle décrit sur EF, et que, de plus, leurs centres se

confondent : d'abord l'égalité des cercles est évidente, puisque la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre AC et BC et que d'ailleurs il a été prouvé que $AC \times BC = \overline{EF}^2 = \overline{CG}^2$; pour démontrer que les centres se confondent, on se rappellera que si d'un point, on mène deux tangentes à un cercle, ces deux tangentes sont égales; donc

$$CO = EO = OF;$$

donc le point O se trouve sur le milieu de EF; il se trouvera aussi sur le milieu de CG, puisque

$$CO = \frac{EF}{2} = \frac{CG}{2} \text{ (*)}.$$

(*) Cette solution donne lieu à une observation. Soient les deux proportions

$$a : b = c : d;$$
$$e : f = g : h$$

en posant $\frac{a}{b} = p, \frac{e}{f} = q$, on aura les égalités

$$a = pb, \; c = pd; \; e = qf, \; g = qh$$

qui donnent

$$a - e = pb - qf, \; c - g = pd - qh$$

et ce n'est qu'autant que $q = p$, qu'on peut en tirer la propriété

$$a - e : b - f = c - g : d - h.$$

Ainsi la proportion (*c*) ou (*d*) conclue par M. *Groetaers*, suppose que les deux précédentes (*a*) et (*b*) aient un rapport commun. Et, en effet, K et *k* étant les centres des cercles intérieurs, les triangles D*k*E et DKF semblables, montrent que les angles E*k*D et FKD sont égaux; d'où l'on conclut que les arcs E*m*B et E*n*C ont même nombre de degrés et qu'ainsi les angles ECD et FAD sont égaux, et qu'enfin les triangles DEC et DFA sont semblables et donnent l'égalité de rapports DF : DA = DE : DC dans les proportions (*a*) et (*b*). Si M. *Groetaers* a fait ce raisonnement ou un autre équivalent, pourquoi l'a-t-il omis et laissé croire qu'ayant (*a*) et (*b*), on pouvait toujours en conclure (*c*) ? D'après le théorème de *Ptolomée*, on a la propriété (pag. 265)

$$FG \times CE + FC \times GE = FE \times CG = \overline{CG}^2$$

Autre solution par M. A. Leschevain, *de Tournay, élève de l'Université de Gand* (**).

Si sur une droite quelconque BH prise pour diamètre (*fig.* 65), on construit une demi-circonférence, qu'on divise ensuite ce diamètre en deux parties quelconques, telles que BL et LH, et que sur ces deux parties prises pour diamètres, on construise encore deux demi-circonférences, l'aire BKHmLnB comprise entre les trois demi-circonférences, sera équivalente à l'aire du cercle qui a pour diamètre la tangente nm commune aux deux derniers demi-cercles, et limitée aux points de tangence.

Soit

$$\left.\begin{array}{l} BH = 2a \\ CL = b \\ LD = c \\ mR = d = c - b \end{array}\right| \text{ on en déduira } \left|\begin{array}{l} b + c = a \\ c = \frac{a}{2} + \frac{d}{2} \\ b = \frac{a}{2} - \frac{d}{2} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (1)$$

L'aire du grand demi-cercle dont a est le rayon, sera égale à $\frac{\pi a^2}{2}$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre. Les aires des deux

---

or, à cause de $\overline{FG}^2 = GC \times Gr'$, $\overline{CE}^2 = GC \times Cr$; $\overline{FC}^2 = GC \times Cr'$, $\overline{GE}^2 = GC \times Gr$, il vient

$$GC\sqrt{Gr' \times Cr} + GC\sqrt{Cr' \times Gr} = \overline{GC}^2$$

d'où

$$\sqrt{Gr' \times Cr} + \sqrt{Cr' + Gr} = GC.$$

Ainsi la somme de ces moyennes proportionnelles, donne le diamètre CG ou EF.

Comme les angles CFG, CFA, CEG et CEB sont droits, il s'ensuit que les cordes AF et BE concourent en G. Cette figure offre encore d'autres propriétés sur lesquelles les élèves peuvent s'exercer. Par exemple, on trouve facilement que l'aire du cercle CFGE est la somme des aires des demi-cercles décrits sur AG et BG, diminuée de la somme des aires des demi-cercles décrits sur AC et CB.

J. G. G.

(**) Cet élève a remporté le premier prix de mathématiques supérieures à l'athenée de Tournay.

autres demi-cercles, seront $\frac{\pi c^2}{2}$ et $\frac{\pi b^2}{2}$. L'aire comprise entre les trois demi-cercles, est égale à l'aire du grand diminuée de celle des deux autres : elle sera donc $\frac{\pi}{2}(a^2 - b^2 - c^2)$; remplaçons b et c par leurs valeurs (1), il viendra $\frac{\pi}{4}(a^2 - d^2)$ pour l'aire BKHmLnB.

L'aire du cercle dont le diamètre est nm, aura pour expression $\pi\left(\frac{mn}{2}\right)^2$ ou $\frac{\pi}{4}\overline{mn}^2$. Le triangle rectangle nmR donne $\overline{mn}^2 = \overline{nR}^2 - \overline{mR}^2 = a^2 - d^2$. Remplaçons $\overline{mn}^2$ par cette valeur, et il viendra $\frac{\pi}{4}(a^2 - d^2)$ pour l'expression de l'aire du cercle dont nm est le diamètre : cette aire est donc équivalente à l'aire comprise entre les trois demi-cercles.

Troisième solution par M. Lobatto.

Soient r le rayon du demi-cercle décrit sur BH (*fig.* 65) ; $\frac{r+x}{2}$ et $\frac{r-x}{2}$ les rayons des demi-cercles décrits sur HL et LB ; on aura pour l'aire comprise entre les trois demi-cercles

$$\frac{\pi}{2}\left[r^2 - \left(\frac{r+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{r-x}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r^2-x^2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(r^2-x^2)$$

or, en menant les rayons Dm et Cn aux points de contact, et la parallèle CK à la tangente nm, on a évidemment

$$\overline{nm}^2 = \overline{CK}^2 = r^2 - \left[\left(\frac{r+x}{2}\right) - \left(\frac{r-x}{2}\right)\right]^2 = r^2 - x^2.$$

Donc le cercle décrit sur nm a pour valeur $\frac{\pi}{4}(r^2 - x^2)$ qui est celle de la différence trouvée ci-dessus (*).

(*) Nous avons reçu une solution de ce problème, par M. *W. H. Cost Jordens*, de Deventer, qui sera insérée dans le numéro suivant.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Solution par M. A. LESCHEVAIN, *de la question proposée*, Correspondance, *tom. II, pag.* 192. *Dans l'hyperbole, la portion d'asymptote interceptée entre deux tangentes quelconques, est divisée en deux segmens égaux, par la corde de contact.*

Soient (*fig.* 66) x'', y'' et x', y' les coordonnées des points de tangence m'' et m', et soit l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. L'équation de la tangente $m''d$, sera

$$y-y''=-\frac{y''}{x''}(x-x'')$$

et en faisant $y=0$ dans cette équation, on aura $x=2x''$ pour l'abscisse du point d où cette tangente coupe l'asymptote Ad' prise pour axe des x. Donc $Ad=2x''$.

On trouvera de même $2x'$ pour l'abscisse du point d' où l'autre tangente $m'd'$ coupe la même asymptote, donc $Ad'=2x'$. Maintenant menons une corde par les points m'' et m' : l'équation de cette corde sera

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x') \quad \ldots\ldots (1)$$

Les points m'' et m' étant sur l'hyperbole, il y a entre leurs coordonnées la relation

$$x''y''=M^2;\ x'y'=M^2$$

d'où il suit que

$$y''=\frac{M^2}{x''};\ y'=\frac{M^2}{x'}$$

remplaçons y'' et y' par ces valeurs dans l'équation (1), faisons ensuite dans cette même équation, $y=o$, et nous aurons $x=x''+x'$, pour l'abscisse du point h, où la corde de contact coupe l'axe. La distance de ce point au point d, est $x''+x'-2x''$; ou $x'-x''=dh$.

La distance de ce même point au point d', est $2x'-x''-x'$, ou $x'-x''=d'h$; d'où $dh=d'h$; donc la corde de contact coupe la portion d'asymptote dd' en deux parties égales.

On prouverait de même que $ek=ke'$, et pour cela on prendrait l'autre asymptote pour axe des x; car il est indifférent de choisir l'une ou l'autre, et on trouverait de la même manière que le point k est également distant des points e et e'.

On peut démontrer la même proposition par la géométrie. A cet effet, menons les parallèles $m''v$, $m''n$, $m'n'$, aux asymptotes. Nous aurons d'abord,

$$\frac{dd'}{2}=\frac{Ad'}{2}-\frac{Ad}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Les triangles semblables $ve'm''$ et $Ae'd$, donnent

$$Ad=2vm''=2An$$

ou bien à cause de $m'h=m''k$ et de l'égalité des triangles $n'm'h$ et $vm''k$

$$\frac{Ad}{2}=An=n'h.$$

Les triangles semblables $ed'A$ et $m'd'n'$, donnent

$$Ad'=2n'd',\ \text{d'où}\ \frac{Ad'}{2}=n'd'.$$

Remplaçant dans l'équation (1) $\frac{Ad'}{2}$ et $\frac{Ad}{2}$ par ces valeurs, il viendra

$$\frac{dd'}{2}=\frac{dh}{2}+\frac{hd'}{2}=n'd'-n'h=hd'$$

d'où $hd=hd'$. Ce qu'il fallait démontrer.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Solution de la question 3.°, *proposée* Corresp. *tom. II, pag.* 256, *par M.* LOBATTO.

On a, en général, pour le développement de la fonction sin. mx (voyez *La Croix.* Traité de Calc. diff. et intégr. vol. I, pag. 80).

$$\sin. mx = \sin. x \left[2^{m-1} \cos.^{m-1} x - (m-2)\, 2^{m-3} \cos.^{m-3} x + \frac{m-3 \,.\, m-4}{1 \,.\, 2} 2^{m-5} \cos.^{m-5} x - \text{etc.} \right]$$

divisant de part et d'autre par sin. x, et posant ensuite $x = 0$, ce qui donnera $\frac{\sin. mx}{\sin. x} = m$, ainsi qu'on le trouve par la différentiation du numérateur et du dénominateur, on tombera sur la formule

$$m = 2^{m-1} - (m-2)\, 2^{m-3} + \frac{m-3 \,.\, m-4}{1 \,.\, 2} 2^{m-5} - \text{etc.} \quad \text{(A)} \ (*)$$

Voici encore un moyen assez simple de s'assurer de la vérité de cette formule.

Si l'on y met successivement $m+1$ et $m-1$ à la place de m, il viendra les deux séries

$$m+1 = 2^{m} - (m-1)\, 2^{m-2} + \frac{m-2 \,.\, m-3}{1 \,.\, 2} 2^{m-4} - \frac{m-3 \,.\, m-4 \,.\, m-5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} 2^{m-6} + \text{etc.} \ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

$$m-1 = 2^{m-2} - (m-3)\, 2^{m-4} + \frac{m-4 \,.\, m-5}{1 \,.\, 2} 2^{m-6} - \text{etc.} \ldots \quad \text{(C)}$$

(*) M. *Timmermans*, maintenant professeur de mathématiques spéciales à l'athénée de Tournay, nous adresse 1°. une solution de la même question, qui rentre dans celle de M. *Lobatto*; 2° une solution de la question 2°, Tom. II, pag. 256 : on la trouvera dans le n° suivant.

prenant leur somme, on trouve après réduction,

$$2m = 2^m - (m-2)\,2^{m-2} + \frac{m-3\,.\,m-4}{1\,.\,2}\,2^{m-4} - \frac{m-4\,.\,m-5\,.\,m-6}{1\,.\,2\,.\,3}\,2^{m-6}$$

ce qui est précisément le même résultat qu'on aurait trouvé en multipliant la formule (A) par 2.

Si l'on prend la différence entre les séries (B) et (C), on obtient encore cette série remarquable

$$1 = 2^{m-1} - m\,.\,2^{m-3} + \frac{m\,.\,m-3}{1\,.\,2}\,.\,2^{m-5} - \frac{m\,.\,m-4\,.\,m-5}{1\,.\,2\,.\,3}\,2^{m-7} + \text{etc.}$$

laquelle aurait encore pu être déduite directement de la valeur de cos. mx en fonction des puissances de cos. x, en y posant $x=0$ (*).

C'est de la même manière que l'on obtient aussi au moyen des séries ascendantes pour le développement de cos. mx et sin. mx (ouv. cité, pag. 83)

1.° Lorsque m est un nombre impair

$$\pm 1 = m - \frac{m(m^2-1)}{2\,.\,3} + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} + \text{etc.}$$

$$\pm m = 1 - \frac{m^2-1}{2} + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4} - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \text{etc.}$$

(*) Ce développement est

$$\cos.\,mx = \cos.\,x\left[2^{m-1}(\cos.\,x)^{m-1} - \frac{m}{1}\,2^{m-3}(\cos.\,x)^{m-3} + \frac{m(m-3)}{1\,.\,2}\,2^{m-5}(\cos.\,x)^{m-5} - \text{etc.}\right]$$

Au reste ces développemens de sin. mx et cos. mx seront démontrés très-simplement dans le titre suivant.

J. G. G.

2.° Lorsque m est un nombre pair

$$\pm 1 = 1 - \frac{m^2}{2} + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4} - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$\pm 1 = 1 - \frac{m^2-4}{2.3} + \frac{(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5} - \frac{(m^2-4)(m^2-16)(m^2-36)}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

De ces quatre dernières séries, on peut en déduire encore plusieurs autres ; ce que nous laissons à faire à ceux qui auront le loisir de s'occuper de semblables recherches.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Sur les sections angulaires de VIETE *et de* WALLIS, *et les principaux résultats de la Trigonométrie, déduits du théorème de* PTOLOMÉE, *par* N. FERGOLA (*Mém. de l'Acad. des sciences de Naples, tom. I, p.* 205).

Cet article est tiré, en grande partie, du *Bulletin universel des sciences mathématiques, physiques et chimiques* (n.° 5, mai, 1826) : mais comme, dans cette collection, on s'est décidé à ne pas employer de figures, tandis qu'ici on a cru devoir recourir à ce moyen d'aider l'intelligence, lequel est d'ailleurs employé de temps immémorial, nous avons cru faire une chose utile à plusieurs de nos lecteurs, en éclaircissant ces recherches par quelques développemens et surtout par la construction des figures supposées.

On sait que le théorème de *Ptolomée* consiste en ce que, dans le

quadrilatère AEFG (*fig.* 67), inscrit à un cercle, on a

$$AF \times EG = AE \times FG + AG \times EF \;....\; (1)$$

Si dans un cercle dont le centre est O (*fig.* 68), on prend les arcs égaux AB=BC=CD=DE=EF=FG, etc., qu'on mène les cordes EG et AF et qu'on considère le quadrilatère AEFG, on aura, en vertu de (1),

$$AF \times EG = EF \times AG + FG \times AE = EF\,(AE + AG) ... (2)$$

Or, les triangles isoscèles et semblables BOH et EFG donnent la proportion

$$BH : BO = EG : EF$$

qui change l'égalité (2) dans la suivante

$$AF \times BH = BO\,(AE + AG) \;......\; (3)$$

Si l'on pose le rayon BO = 1, on tirera de la précédente cette relation

$$AG = AF \times BH - AE. \;........\; (4)$$

qui montre qu'*une corde* AG *est égale à la précédente* AF *multipliée par la corde supplémentaire* BH, *et diminuée de la corde pénultième* AE.

Posons la première corde AB = z, sa supplémentaire BH = y, et en vertu de la relation (5) entre trois cordes, applicable à partir de la troisième AD et même de la seconde AC, on aura

1.° corde $AB = z$
2.° .... $AC = zy$ (*)
3.° .... $AD = z\,(y^2 - 1)$
4.° .... $AE = z\,(y^3 - 2y)$
5.° .... $AF = z\,(y^4 - 3y^2 + 1)$
....
....

Or les coefficiens numériques verticalement placés, des polynomes

(*) Cette égalité se tire encore de la similitude des triangles ABC et OBH, qui donne

$$AC : AB = BH : BO.$$

entre parenthèses, étant les séries des nombres naturels, triangulaires, pyramidaux, etc., on aura pour la n^e corde

$$(5)\ldots\ n^e \text{ corde} = z\left[y^{n-1} - \frac{n-2}{1}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}y^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}y^{n-7}\right]$$

série trouvée pour la première fois par *Jean Bernoulli.*

Si l'on veut en déduire l'expression du côté d'un polygone régulier inscrit, et, par exemple, du pentagone, il faudra supposer nulle la cinquième corde AF, en observant que le point F est en A, et comme le facteur z ne peut être nul, on aura l'équation

$$y^4 - 3y^2 + 1 = 0,$$

dont l'une des racines fera connaître la corde du supplément de l'arc AB qui est le cinquième de la circonférence. Posons l'angle AHB $= \varphi$, et supposons que le point de division F soit le n^{eme}, à partir de A, et dans le sens ABCDEF, etc; on aura les angles

$$\text{AHF} = n\varphi,\ \text{AHG} = (n+1)\varphi,\ \text{AHE} = (n-1)\varphi,$$

puis, en prenant le diamètre AH pour unité, on obtiendra

$$\text{AB} = \sin.\varphi,\ \text{AF} = \sin.n\varphi,\ \text{AG} = \sin.(n+1)\varphi,\ \text{AE} = \sin.(n-1)\varphi$$
$$\text{BH} = \cos.\varphi,\ \text{FH} = \cos.n\varphi,\ \text{GH} = \cos.(n+1)\varphi,\ \text{EH} = \cos.(n-1)\varphi$$

et l'équation (3) donnera

$$\sin.n\varphi\cos.\varphi = \tfrac{1}{2}[\sin.(n+1)\varphi + \sin.(n-1)\varphi]$$

d'où

$$\sin.(n+1)\varphi + \sin.(n-1)\varphi = 2\sin.n\varphi\cos.\varphi \ldots\ (6)$$

On trouverait de même

$$\cos.(n+1)\varphi + \cos.(n-1)\varphi = 2\cos.n\varphi\cos.\varphi \ldots\ (7)$$

Si dans la formule (6), on suppose successivement, $n = 1, = 2$ etc., on obtiendra les valeurs de sin. 1φ, sin. 2φ, et, en général, cette série

$$\sin.n\varphi = \sin.\varphi\left[(2\cos.\varphi)^{n-1} - (n-2)(2\cos.\varphi)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2\cos.\varphi)^{n-5} - \text{etc.}\right] \ldots\ (8)$$

De la formule (7), sous les mêmes hypothèses, on conclura

$$2\cos.n\varphi = (2\cos.\varphi)^n - n(2\cos.\varphi)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2\cos.\varphi)^{n-4} - \text{etc.} \quad (9)$$

Ces séries (8) et (9) qui, à la vérité, sont obtenues par induction, repètent celles que M. *Lobatto* a employées dans le titre précédent.

Soient (*fig.* 69) les angles BHA $= \varphi$, AHD $= \theta$; menons le diamètre AH et les cordes AB, AD et BD. Le quadrilatère ABHD donnera

$$AH \times BD = AB \times DH + AD \times BH$$

d'où

$$\frac{AH}{2} \times \frac{BD}{2} = \frac{AB}{2} \times \frac{DH}{2} + \frac{AD}{2} \times \frac{BH}{2}$$

Faisant le rayon $\frac{AH}{2} = AO = 1$, cette égalité donnera

$$\sin.(\varphi + \theta) = \sin.\varphi\cos.\theta + \sin.\theta\cos.\varphi \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

On déduira de là les trois autres formules connues.

OBSERVATION.

Lorsqu'on passe (*fig.*68) du cercle du rayon OA auquel est rapportée la série (5) au cercle du rayon double HA dont le centre est en F, il faut doubler la n^e corde, z et y ; ainsi cette série devient

$$n^e \text{ corde AF} = z\left[(2y)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2y)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2y)^{n-5} + \text{etc.}\right]$$

de sorte qu'en remplaçant la n^e corde AF, z et y par sin. $n\varphi$, sin. φ et cos. φ, on tombe sur le développement (8). Des considérations analogues aux précédentes, conduiraient à la série (9). A la vérité ces deux séries seraient encore obtenues par *induction*.

J. G. G.

Suite et fin de l'article sur la trisection de l'angle, Corresp., *tom. II, pag.* 205.

Nous avions annoncé les observations du Geomètre allemand sur la solution de la trisection du Géomètre turc, remarquable d'ailleurs par une synthèse élégante, mais qu'une erreur capitale rend illusoire : mais comme l'analyse du Géomètre allemand, revue par le conseiller aulique et professeur *Muncke,* co-rédacteur du Journal de Heildelberg, pour la partie mathématique, ne conduit à aucune conclusion, et qu'on convient d'ailleurs de la nécessité de revoir cette seconde partie, nous remplacerons ces recherches par les suivantes qui se rapportent au sujet en question.

Si l'on désigne (*fig.* 70) un arc ACO par φ, conséquemment son tiers AC par $\frac{1}{3}\varphi$, et qu'on pose AO $=$ cord. $\varphi = m$, AC $=$ cord. $\frac{1}{3}\varphi = x$, le rayon du cercle $= r$, on sait qu'on a l'équation

$$x^3 - 3r^2x + mr^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pour en revenir à l'équation dont les racines sont les cosinus des arcs tiers, on fera cos. $\frac{1}{3}\varphi = y$, cos. $\varphi = a$, et on aura

$$(2) \ldots\ldots\ x^2 = 2r\,(r - y)\,;\ m^2 = 2r\,(r - a) \ldots\ldots\ (3)$$

Multipliant (1) par x, faisant les substitutions (2) et (3) et quelques réductions, on tombe sur l'équation connue

$$y^3 - \tfrac{3}{4}r^2y - \frac{r^2a}{4} = 0, \text{ ou } y^3 - \tfrac{3}{4}y - \frac{a}{4} = 0 \ldots \quad (4) \quad (*)$$

pour $r = 1$.

(*) Soient AO la corde de l'arc 3 φ et AC ou AE celle de l'arc φ, ce qui revient aux hypothèses du texte, et supposons le rayon $= 1$: on trouvera facilement $\overline{AO}^2 = 2\,(1 - \cos.\ 3\,\varphi)$, $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 = 2\,(1 - \cos.\ \varphi)$: donc, en écrivant pour cos. 3 φ sa valeur connue, on aura

$$\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AO}^2} = \frac{1 - \cos.\ \varphi}{1 + 3\cos.\ \varphi - 4\cos.^3\varphi}$$

Posant AE $= x$, AO $= m$, cos. $\varphi = y$, cos. 3 $\varphi = a$, et ayant égard aux relations (3), on tombera immédiatement sur l'équation (4).

Le volume du segment produit par la révolution du demi-segment circulaire BEFD autour du diamètre AC (*fig.* 71), a pour expression

$$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{EF}\,(\overline{\mathrm{BE}}^2+\overline{\mathrm{DF}}^2)+\tfrac{1}{6}\,\overline{\mathrm{EF}}^3$$

Supposons $\mathrm{BE}=0$, portons DF en D′F′ et posons $\mathrm{OF}'=x$, O étant le centre ; l'expression ci-dessus deviendra

$$\frac{\pi}{2}(r+x)\,\overline{\mathrm{D'F'}}^2+\tfrac{1}{6}\pi(r+x)^3$$

ou bien, en observant que $\overline{\mathrm{D'F'}}^2=r^2-x^2$, elle se changera dans celle-ci

$$\frac{\pi}{2}(r+x)^2(r-x)+\tfrac{1}{6}\pi(r+x)^3$$

qui revient à

$$\tfrac{1}{3}\pi\,[2r^3+3rx-x^3]$$

Si donc on désigne le grand segment AD′F′ par P et son supplément D′CF′ par S, on aura

$$\mathrm{P}=\frac{\pi}{3}[2r^3+3r^2x-x^3],\ \mathrm{S}=\frac{\pi}{3}[2r^3-3r^2x+x^3]$$

On a d'une part $\mathrm{P}+\mathrm{S}=\frac{4\pi}{3}r^3$, de l'autre $\mathrm{P}-\mathrm{S}=\frac{2\pi}{3}[3r^2x-x^3]$, et conséquemment

$$\frac{\mathrm{P}-\mathrm{S}}{\mathrm{P}+\mathrm{S}}=\frac{\frac{2}{3}\pi(3r^2x-x^3)}{\frac{4}{3}\pi r^3},\ \text{d'où}\ x^3-3r^2x+r^2\times 2r\times\frac{\mathrm{P}-\mathrm{S}}{\mathrm{P}+\mathrm{S}}=0.\quad(5)$$

Comme cette équation tombe dans le cas irréductible, on en conclut que ses trois racines sont réelles : en la comparant avec (1), on reconnaît qu'elle donne la trisection de l'arc φ qui aurait pour corde $m=2r\left(\frac{\mathrm{P}-\mathrm{S}}{\mathrm{P}+\mathrm{S}}\right)$ dans le cercle du rayon r. Mais comme $2r\left(\frac{\mathrm{P}-\mathrm{S}}{\mathrm{P}+\mathrm{S}}\right)$ est plus petit que $2r$, l'arc φ est moindre que la demi-circonférence, et $\frac{\varphi}{3}$ moindre que son sixième ; donc $x=\text{cord.}\,\frac{\varphi}{3}$ est plus petit que le côté de l'hexagone, et les deux autres racines $x'=\text{cord.}\,\frac{2\pi+\varphi}{3}$, $x''=\text{cord.}\,\frac{4\pi+\varphi}{3}$ sont plus

grandes que le rayon. La première racine est la seule qui appartienne à la question, et nous allons montrer que les deux dernières en résolvent une autre. A cet effet, désignons par u le volume d'un corps engendré par le segment AMP (*fig.* 72) tournant autour de l'axe des abscisses : ce volume est représenté par

$$u = \pi \int y^2 dx :$$

qu'il s'agisse de l'hyperbole équilatère ayant r pour demi-axe : on aura pour son équation

$$y^2 = x^2 - r^2$$

donc

$$u = \pi \int y^2 dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - r^2 x + C\right) = \frac{\pi}{3}(x^3 - 3rx^2 + C')$$

en posant $C' = 3C$: pour $x = CA = r$, on a $u = 0$, d'où $C' = \frac{2\pi r^3}{3}$; et enfin

$$u = \frac{\pi}{3}(x^3 - 3r^2 x + 2r^3) \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

exprèssion qui est précisément celle du petit segment sphérique que nous avons désigné par S, en observant que le segment hyperbolique que nous considérons, a pour flêche $x - r$, tandis que, dans la sphère, la flêche est $r - x$. Qu'on change dans (6) x en $-x$, et on retombera sur le segment sphérique P dont la flêche a pour longueur absolue $x + r$. Si dans l'équation (5), on fait les hypothèses $r = 1$ et $m = 0$, on aura $\frac{P - S}{P + S} = 0$, d'où $P = S$, et les racines $x = 0$ et $x = \pm \sqrt{3}$. Ainsi, pour la sphère, la section doit passer par le centre, et pour l'hyperbole, les sections seront faites à des distances $\pm \sqrt{3}$ du centre C. Les segmens correspondans sont $u = \frac{2\pi}{3}$ pour $x = +\sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$, et leur somme $\frac{4\pi}{3}$ est le volume de la sphère pour le rayon $= 1$. Ainsi le rapport entre les segmens, étant donné, on connaîtra la corde de l'arc triple, savoir $2\left(\frac{P - S}{P + S}\right)$: la résolution ou la construction de la trisectrice correspondante, donnera les cordes des trois arcs tiers; celle qui sera moindre que le rayon, portée de C en Q, donnera la position du plan de section pour la sphère, et les deux autres portées de C en

P et en p, donneront celles des plans coupans de l'hyperboloïde, en sorte que les deux segmens qui en résultent, composent le volume de la sphère.

En prenant l'origine de l'ellipsoïde au centre, posant l'abcisse $=x$, le demi-grand axe $=r$, le demi-second axe $=b$, et désignant toujours le grand segment par P et le petit par S, et effectuant l'intégrale $\pi\int y^2dx$, on trouve

$$P=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{b^2}{r^2}(3r^2x-x^3-2r^3);\ S=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{b^2}{r^2}(x^3-3r^2x-2r^3)$$

d'où

$$\frac{P-S}{P+S}=\frac{-2x^3+6r^2x}{-4r^3},\ \text{et}\ x^3-3r^2x+r^2\times 2r\times\frac{P-S}{P+S}=0$$

équation dont on sait d'avance que les trois racines sont réelles; l'absence du second terme et le signe du dernier, montrent que deux de ces racines sont positives et la troisième négative, et que celle-ci est égale à la somme des deux premières. Ce qui précéde suffira pour compléter cette discussion.

J. G. G.

Solutions du problême proposé Corresp. Math. et Phys., *tom. II, pag.* 130, 1.°, *par M.* G. N. GROETAERS, *élève de l'Ecole de Delft.*

I.re Sol. Soient (*fig.* 73) LM la ligne de terre, AB et CD les deux droites données que nous supposerons situées dans le plan de projection horizontale, et (E, E′) le point donné.

Par le point (E, E′) menons deux plans dont l'un passe par AB et l'autre par CD; il est évident que la commune section de ces deux plans, sera la droite cherchée; pour la trouver, imaginons par le point (E, E′) des parallèles aux droites AB et CD; il est clair que ces parallèles sont sur les plans cherchés; donc les points F′ et G′,

où elles percent le plan de projection verticale, appartiennent aux traces verticales de ces plans; donc AF′ et CG′ sont ces traces; donc EH et E′H′ sont les projections de la droite cherchée.

II.° Sol. Soient encore, (*fig.* 74), LM la ligne de terre, AB et CD les droites données, et (E, E′) le point donné que nous supposerons situé sur le plan vertical de projection; puisque les droites AB et CD et la droite cherchée doivent concourir, nous pouvons les considérer comme étant les arêtes d'une pyramide dont la section par le plan vertical de projection, est le triangle AE′C; cela posé, coupons la pyramide par un plan HF parallèle au plan vertical; il est évident que les droites H′G′ et F′G′, respectivement parallèles aux droites AE′ et CE′, seront les projections verticales des droites selon lesquelles le plan FG coupe la pyramide; dont le point (G, G′) appartient à l'arête; donc GE et G′E′ sont les projections de cette arête, ou celles de la droite cherchée.

On pourrait aussi déterminer un point de la troisième arête, en coupant la pyramide par un plan parallèle au plan de projection horizontale.

Ces deux solutions conserveraient leur simplicité, en supposant les droites situées hors des plans de projection.

(*) En concevant, comme M. *Manderlier* (tom. II, pag. 140), les deux droites situées dans le plan horizontal et l'une d'elles perpendiculaire au plan vertical qui passe par le point donné, on peut éclaircir de cette manière sa construction : par le point donné et par les deux droites données, on mènera des plans dont l'intersection sera la droite cherchée dont il faudra déterminer un second point : à cet effet, dans celui des deux plans qui est perpendiculaire au plan vertical, on mènera une droite quelconque, elle aura pour projection verticale, la trace verticale de ce plan et une trace horizontale quelconque : le point d'intersection de cette droite avec l'autre plan, sera un second point de la droite cherchée.

J. G. G.

MÉCANIQUE.

Nouvelle démonstration du principe des vitesses virtuelles, par M. Ampère, *de l'Institut de France* (*).

Observons d'abord qu'un point est toujours déterminé de position par trois équations entre ses coordonnées; si donc on nous donne n points et $3n$ équations entre leurs coordonnées, ces points seront complétement fixés, et ne pourront prendre aucun mouvement; mais s'ils ne sont liés que par $3n-1$ équations, chacun d'eux sera assujetti à se mouvoir sur une courbe déterminée : en effet, si l'on élimine les coordonnées de $n-1$ de ces points, ou $3n-3$ inconnues, il est clair qu'il nous restera 2 équations entre les coordonnées du point restant, équations de deux surfaces dont l'intersection est la courbe sur laquelle doit se mouvoir le point considéré.

(*) Dans un mémoire couronné et dont nous avons rendu compte (*Corresp.*, tom. I, pag. 83 et suiv.) M. *Guinard*, docteur en sciences, en médecine et en chirurgie, à l'Université de Gand, a exposé les différentes démonstrations du principe des vitesses virtuelles, depuis les premiers aperçus donnés par M. *Fourier*, jusqu'à ces derniers temps. A la page 132 et suiv.; 207 et suiv.; 334 et suiv. du même volume, on trouve une démonstration de ce principe par M. *A. Timmermans*, alors professeur de mathématiques supérieures au Collége royal de Gand, et qui vient d'être nommé à la même chaire, à l'Athénée royal de Tournay; nous en avons consignée une autre de M. *M. G. Pagani* (*Corresp.* tom. II, pag. 19 et suiv.; pag. 94 et suiv.; pag. 158 et suiv.) Et quoique, dans un journal scientifique, d'ailleurs très-estimable, comme ils le sont tous, on se plaigne de la multiplicité de ces démonstrations, et qu'on les trouve aujourd'hui superflues, bien qu'elles n'aient pas encore pullulé à la manière de celles du binome, néanmoins nous avons cru devoir accueillir et consigner ici la nouvelle tournure de démonstration que M. *Ampère* a bien voulu nous communiquer.

J. G. G.

Cela posé, cherchons d'abord si le principe des vitesses virtuelles est vrai pour un système de deux points dont les coordonnées sont liées par cinq équations, et soient (*fig.* 75) AmB et A′m′B′ les courbes sur lesquelles doivent se mouvoir ces deux points.

Soient m une position de celui qui se meut sur AB et m' une position de celui qui se meut sur A′B′ : soient P P_1 P_2 etc., les forces appliquées au point m; P′ P'_1 P'_2 etc. les forces appliquées au point m'; soit enfin un troisième point N assujetti à rester à des distances constantes de m et de m' : a et b étant ces longueurs, et t, u, v les coordonnées du point N, on aura

$$(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=a^2$$
$$(t-x')^2+(u-y')^2+(v-z')^2=b^2:$$

si entre ces deux équations et les cinq qui lient entre elles les coordonnées des points donnés, on élimine ces dernières qui sont au nombre de six, et qu'on observe qu'on n'a que sept équations entre neuf inconnues, on reconnaîtra qu'on est conduit à une équation unique entre t, u, v, qui est celle d'une surface sur laquelle doit rester le point N. Si on la coupe par une autre surface dont l'équation soit $F(t, u, v)=0$, il est clair que le point N sera réduit à se mouvoir sur la courbe d'intersection de ces deux surfaces. Cela posé, j'applique suivant Nm deux forces Q égales et opposées, l'une en N, l'autre en m : j'applique de même aux points N et m' suivant Nm', deux forces Q′ égales et contraires : il est clair que l'état du système ne sera pas troublé, et qu'il restera en équilibre, puisque nous l'y avons supposé. Or, je puis déterminer Q de manière que les forces Q P P_1, etc. soient en équilibre autour du point m, abstraction faite des autres parties du système : car en appelant ε l'angle que fait Nm avec une droite quelconque passant par m et α, α_1, α_2, etc., les angles des forces P P_1, etc., avec cette droite, je puis disposer de Q de manière qu'on ait $Q\cos.\varepsilon+P\cos.\alpha+\text{etc.}=0$, ou ce qui revient au même, $Qq+Pp+\text{etc.}=0$, q p p_1 etc., étant les vitesses virtuelles du point m, estimées suivant les directions des forces Q P P_1 etc. Je puis donc déterminer Q de manière qu'on ait $Qq+\Sigma Pp=0$ et Q′ de manière qu'on ait $Q'q'+\Sigma P'p'=0$, d'où l'on tire $Qq+Q'q'+\Sigma Pp+\Sigma P'p'=0$. Cela fait, pour que le système soit en équilibre, il faut que l'équilibre existe entre les forces

Q et Q′ appliquées au point N, ou qu'on ait $Qr+Q'r'=o$, r et r' étant les vitesses virtuelles de ce point, suivant Q et Q′. En effet, s'il n'en était pas ainsi, le point N entraînerait dans son mouvement m et m' qui lui sont liés par les équations

$$(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=a^2$$
$$(t-x')^2+(u-y')^2+(v-z')^2=b^2;$$

mais l'équilibre existe dans tout le système par hypothèse, donc on a $Qr+Q'r'=o$; donc si je prouve que $Qr+Qq=o$ et $Q'r'+Q'q'=o$, j'en conclurai $Qq+Q'q'=o$, et par suite $\Sigma Pp+\Sigma P'p'=o$; donc le principe sera démontré.

Il s'agit donc de prouver qu'on a

$$Qr+Qq=o \text{ et } Q'r'+Q'q'=o.$$

En effet, supposons que m prenne une position infiniment voisine m_1 et soit N_1 la position correspondante du point N, en sorte qu'on ait $mN=m_1N_1$. Les élémens mm_1 et NN_1 se confondent avec leurs tangentes : soient donc λ, μ, ν les angles que fait mm_1 avec les trois axes; λ_1, μ_1, ν_1, les angles correspondans de NN_1; soient d'ailleurs ξ, η, ζ, les angles de Nm avec les mêmes axes; nous aurons évidemment

$$dx=mm_1\cos.\lambda \qquad dt=NN_1\cos.\lambda_1$$
$$dy=mm_1\cos.\mu \qquad du=NN_1\cos.\mu_1$$
$$dz=mm_1\cos.\nu \qquad dv=NN_1\cos.\nu_1$$

$$t-x=a\cos.\xi,\quad u-y=a\cos.\eta,\quad v-z=a\cos.\zeta;$$

d'ailleurs nous avons l'équation

$$(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=a^2,$$

qui différentiée par rapport aux six variables qu'elle renferme, donne

$$(t-x)\,dx+(u-y)\,dy+(v-z)\,dz=$$
$$(t-x)\,dt+(u-y)\,du+(v-z)\,dv;$$

mettant pour ces quantités leurs valeurs, et divisant les deux membres de l'équation résultante par a, on a

$$mm_1(\cos.\lambda\cos.\xi+\cos.\mu\cos.\eta+\cos.\nu\cos.\zeta)=$$
$$NN_1(\cos.\lambda_1\cos.\xi+\cos.\mu_1\cos.\eta+\cos.\nu_1\cos.\zeta)\ldots\ldots(1)$$

Cela posé, si nous menons N_1d et m_1c perpendiculaires à mN, on a

$$\cos.cmm_1=\cos.\lambda\cos.\xi+\cos.\mu\cos.\eta+\cos.\nu\cos.\zeta,$$

et par conséquent

$$mc = mm_1 \cos. cmm_1 = mm_1 (\cos. \lambda \cos. \xi + \text{etc.})$$

De même

$$NN_1 (\cos.\lambda_1 \cos.\xi + \cos.\mu_1 \cos.\eta + \cos.\nu_1 \cos.\zeta) = NN_1 \cos. dNN_1 = Nd\,;$$

donc à cause de l'équation (1), on a $Nd = mc$; mais, d'après nos constructions, on a évidemment

$$Nd = r, \; mc = q\,; \text{ donc } Qr = Qq.$$

On prouverait de même que $Q'r' = Q'q'$, et le principe se trouve démontré.

Réciproquement, et en admettant qu'on n'a plus $\Sigma Pp + \Sigma P'p' = 0$, comme d'ailleurs

$$Qq + Q'q' + \Sigma Pp + \Sigma P'p' = 0$$

parce que les forces appliquées en m et m' se font équilibre, il est évident qu'on n'aura plus $Qq + Q'q' = 0$, et que, par conséquent, l'équilibre n'existe pas dans le système.

Il reste à étendre cette démonstration à un nombre quelconque n de points liés par $3n - 1$ équations, et enfin à un nombre n de points dont un nombre quelconque p d'équations lient les coordonnées. Soit d'abord un système de n points liés par $3n - 1$ équations : soient m, m', m'' etc. ces points, $P\ P_1\ P_2 \ldots\ldots$ les forces appliquées au point m; $P'\ P'_1\ P'_2 \ldots$ celles qui agissent sur le point m'; $P''\ P''_1\ P''_2 \ldots$ les forces appliquées à m'', et ainsi de suite. L'équilibre n'existe pas en général entre les forces qui agissent sur m et m', bien que le système soit en équilibre; mais je puis, sans troubler l'état du système, appliquer au point m' deux forces R' et R'_1 égales et opposées : je puis en outre disposer de R' de manière que les forces $R'\ P\ P_1; \ldots P'\ P'_1 \ldots$ soient en équilibre; car il suffit pour cela qu'on ait

$$R'r' + \Sigma Pp + \Sigma P'p' = 0\,;$$

mais puisque $R' = R'_1$ et lui est opposée, on a

$$R'_1 r'_1 + R'r' = 0\,; \text{ donc } \Sigma Pp + \Sigma P'p' = R'_1 r'_1.$$

Cela posé, supprimons dans cette partie du système les forces qui s'équilibrent; il ne restera que R'_1 appliquée au point m'. Considé-

rons le point m' et le point m'' sollicité par les forces P'', P''_1 etc. Je puis ajouter au point m'', deux forces R'' et R''_1 égales et contraires, et déterminer R'' de manière qu'on ait

$$R''r'' + R'_1r'_1 + \Sigma P''p'' = 0,$$

ou

$$R''r'' + \Sigma Pp + \Sigma P'p' + \Sigma P''p'' = 0,$$

en mettant pour $R'_1r'_1$ sa valeur; mais

$$R''r'' + R''_1r''_1 = 0,$$

donc

$$\Sigma Pp + \Sigma P'p' + \Sigma P''p'' = R''_1r''_1.$$

Supprimant les forces qui se font équilibre dans cette seconde partie du système, il ne reste plus que la force R''_1 au point m'', et les forces P'' P'''_1 P'''_2 etc. au point m'''... Par une suite de raisonnemens analogues, on voit que je parviendrai à l'avant-dernier point, ou au point $m^{(n-2)}$, que ce point ne sera plus sollicité que par une force R_{n-2} telle qu'on a $R_{n-2}r_{n-2} = \Sigma Pp + \Sigma P'p' +$ etc. $=$ la somme de tous ces produits, moins celle des produits correspondans au dernier point $m^{(n-1)}$. Ainsi je n'aurai plus à considérer que le point m^{n-2} sollicité par la force R_{n-2} et le point $m^{(n-1)}$ sollicité par $P^{(n-1)}$, $P_1^{(n-1)}$, $P_2^{(n-1)}$ etc. : or, par hypothèse l'équilibre existe dans le système : puis donc que nous remplaçons le système par ces deux points sollicités par les forces que nous venons d'indiquer, il faut que l'équilibre existe dans le système de ces deux points : d'où il suit qu'on a

$$R_{n-2}r_{n-2} + \Sigma P^{(n-1)}p^{(n-1)} = 0,$$

ou

$$\Sigma Pp + \Sigma P'p' + \text{etc.} + \Sigma P^{(n-1)}p^{(n-1)} = 0,$$

ce qu'il fallait prouver. Enfin dans le cas où l'on considère un système de n points sollicités par un nombre quelconque de forces et liés entre eux par $3n - p$ équations, il est clair qu'on peut ajouter à ces équations, $p - 1$ autres équations sans troubler l'état du système, puisqu'il est en équilibre ; mais alors le système que nous considérons, rentre dans l'un des précédens; le principe est donc vérifié alors : cela fait, je puis choisir $p - 1$ autres équations; alors

les points seront en équilibre dans de nouvelles positions : je puis ainsi placer ces points dans toutes les positions possibles, et le principe sera toujours vérifié; donc il est encore vrai quand on considère les n points comme liés par $3n - p$ équations. Ce qu'il fallait démontrer.

PHYSIQUE.

Observation d'un Halo à Bruxelles. Depuis quelque temps les belles expériences de M. *Arago* sur les halos ou couronnes lumineuses qui se forment autour du soleil ou de la lune, ont rappelé l'attention des physiciens sur ce singulicr phénomène. Le diamètre du cercle que présentent les halos, est communément de 45° à 46° (Bulletin de la Société philomatique de Paris, mars 1825); il s'en forme rarement de seconds qui sont alors concentriques et d'une amplitude double des premiers. *Descartes*, *Mariotte* et *Huyghens* pensaient que la lumière des halos, nous arrive après avoir subi une ou plusieurs réfractions. M. *Arago* vient de prouver que cette hypothèse est fondée : pour cela, il a fait usage d'une méthode qui lui appartient et qui repose sur *les propriétés de la lumière polarisée.* La formation des halos est assez rare; il paraît même que *Descartes* qui a écrit sur ce phénomène, ne l'avait jamais observé.

Le 18 juillet dernier, vers midi et 20 minutes, un halo fortement prononcé s'étant dessiné autour du soleil, la singularité et la rareté de ce phénomène me déterminèrent à l'observer avec plus de soin. Je trouvai que le diamètre de son contour extérieur était d'environ 48 degrés, et en conséquence plus grand qu'on ne le suppose ordinairement (*). Il me parut aussi que, vers l'instant de sa disparition, qui eut lieu une demi-heure après, le diamètre s'était un peu retréci. Le ciel était d'un bleu clair, excepté dans l'intérieur du halo, où sa teinte était d'un bleu foncé fortement prononcé. La bande colorée était d'une teinte roussâtre et il ne me fut guères possible de

(*) A moins qu'on n'entendit parler du diamètre intérieur qui était effectivement de 45 à 46 degrés.



distinguer d'autres couleurs. Quelques gros nuages blancs flottaient dans l'air et venaient quelquefois se placer devant le disque du soleil, d'où partaient alors des gerbes de lumière qui rayonnaient vers la circonférence du halo et se prolongeaient fort au-delà. Le thermomètre de *Réaumur*, au nord et à l'ombre, marquait 17°,5 et le baromètre 0,^{m}7671. A. Q.

MÉTÉOROLOGIE.

Étoiles filantes.

Extrait d'une lettre de M. LOHRMANN, *astronome à Dresde, à M.* A. QUETELET.

A la belle dissertation sur les étoiles filantes de M. *Brandes*, professeur autrefois à Breslau et maintenant à Leipsig, je joins d'après vos désirs quelques mots sur la méthode que j'ai suivie dans l'observation de ces phénomènes. Mon observatoire situé à 45′ 40″ en temps, à l'orient de Paris, sous 51°, 3′ de latitude nord, est élevé de 426 pieds de Paris au-dessus du niveau de la mer, et donne une vue convenable sur l'horizon. C'est-là qu'aux heures fixées par M. *Brandes*, j'observais le ciel en commun avec l'élève M. *Pressler*, moi dans la direction de Breslau, lui dans celle de Leipsig.

J'avais devant moi les petites cartes célestes de *Bode* en 32 feuilles, M. *Pressler*, la grande carte du même auteur.

Une bonne pendule se trouvait assez près de moi, pour que je pusse entendre clairement le battement de chaque seconde.

A l'apparition d'une étoile filante, je fixais le point où je l'avais vue d'abord; marquais sa position relativement aux étoiles brillantes les plus voisines; comptais, en suivant de l'œil le phénomène, les secondes qui s'écoulaient jusqu'à sa disparition, et après avoir, de plus, rapporté leur point final aux étoiles voisines, j'écrivais l'époque et la durée du phénomène sur une feuille préparée à cet

effet; je représentais leur cours sur la carte, et quand il était curviligne j'annotais aussi exactement que possible son écartement de la ligne droite. Je tenais encore note de la grandeur et du degré de clarté de l'étoile filante; je marquais si elle avait été suivie ou non d'une traînée lumineuse, et tout ce que j'avais eu l'occasion de voir.

Il n'est pas difficile de faire ces observations, mais elles exigent quelque habitude et une grande attention. Avec cela, on peut tracer avec assez de certitude, à un degré près, le lieu des étoiles filantes, surtout dans les régions où il y a beaucoup d'étoiles, et observer chaque fois, à une seconde près, l'époque et la durée de leur apparition, lorsqu'on retient le nombre des secondes de la durée du phénomène, et qu'on tient exactement compte des secondes écoulées depuis sa disparition jusqu'à l'instant où l'on observe le temps à la pendule.

Je connais aussi la manière de tracer le lieu des étoiles filantes, au moyen d'un treillis partagé en quarrés d'une grandeur connue, devant lequel on observe à travers une petite ouverture; mais elle est extraordinairement fatigante et beaucoup moins certaine que l'observation libre du ciel, puisqu'on peut beaucoup moins se tromper en observant les étoiles voisines qu'en comptant des fils mal éclairés. TRADUIT PAR L. M.

STATISTIQUE.

Depuis quelque temps, les nations, dans le désir de connaître les résultats de leur commerce et de leur industrie, et d'acquérir des notions plus positives sur tout ce qui concerne leurs intérêts les plus chers, ont senti le besoin de recourir à la Statistique, l'une des applications les plus heureuses des sciences exactes. Cette partie si intéressante, généralement très-connue de nom et fort peu étudiée, a déjà été l'objet des soins particuliers de quelques gouvernemens. Le nôtre, toujours empressé de créer des établissemens utiles, vient de former aussi une Commission de Statistique à laquelle nous devrons bientôt sans doute d'utiles renseignemens. En attendant, nous avons déjà à plusieurs reprises entretenu nos lecteurs de recherches sur la

mortalité, qui se rattachent de plus près aux théories mathématiques; nous croyons aujourd'hui rendre service aux personnes qui s'intéressent à la prospérité de notre patrie, en donnant quelques renseignemens sur l'état du commerce de l'Angleterre avec les provinces qui composent actuellement ce royaume. Nous avons puisé nos données dans des tableaux fort étendus qui ont été publiés à Londres, par M. *C. Moreau*, vice-consul de France, l'un des savans les plus laborieux qui se soient occupés de ces sortes de recherches.

Dans l'impossibilité où nous sommes de citer tous les résultats année par année, nous donnerons les termes moyens, en séparant les périodes de guerre des périodes de paix. On pourra voir par cet aperçu qu'il y a eu une augmentation sensible dans les importations qui ont été presque continuellement au profit de la Grande-Bretagne, tandis que les exportations qui ont eu lieu pour ce pays, n'ont pas aussi sensiblement changé de valeur depuis des époques fort reculées.

ANNÉES.		EXPORTATION.	IMPORTATION.
		liv. sterl.	*liv. sterl.*
Périodes de guerre.	1697	552,484	1,671,895
	1712	604,154	2,251,404
	1721	563,434	2,085,681
	1748	577,795	2,533,097
	1762	487,292	2,239,508
	1783	1,064,103	2,443,795
	1801	653,163	1,516,185
	1815	893,781	2,346,695
Périodes de paix.	1701	624,410	2,044,228
	1717	526,894	2,349,633
	1738	670,772	2,108,739
	1755	407,240	2,442,947
	1774	386,378	2,427,661
	1792	717,057	2.317,986
	1802	1,000,768	4,392,617
	1822	961,269	4,337,316

Ces résultats ont été puisés principalement dans les états officiels et, au moyen d'immenses recherches, dans la masse des documens parlementaires publiés depuis 125 ans. Dans les nombres précédens ne sont pas compris les résultats des importations et exportations pour 1823 et 1824 qui s'élèvent d'une part à 1083758 et 4057243, et de l'autre à 1564273 et 4234806. On voit par cet aperçu que la valeur des importations des marchandises anglaises en Belgique, a été presque toujours trois à quatre fois plus grande que celle des exportations.

A. Q.

Extrait d'une lettre de M. Villermé *à M.* Quetelet.

Monsieur,

Je viens de recevoir un travail intitulé : ***Ricerche di Statica medica sulla cita di Livorno,*** par MM. *Gordini* et *Orsini*. Je crois que les résultats des naissances vous intéresseront; j'en transcris ici le tableau, en changeant seulement sa forme.

Années.	Janvier.	Février.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septemb.	Octobre.	Novemb.	Décemb.	TOTAL.
1818	165	163	217	155	201	157	195	193	206	192	221	204	2,269
1819	261	208	225	165	167	170	175	183	198	194	198	217	2,361
1820	214	207	225	193	189	177	217	182	193	198	243	204	2,442
1821	223	238	229	215	187	152	205	212	173	219	207	198	2,458
1822	219	217	231	194	176	191	207	205	198	202	218	236	2,494
1823	220	181	221	174	186	201	183	230	189	185	228	226	2,424
1824	247	188	223	206	196	184	188	198	202	199	198	215	2,444
	1549	1402	1571	1302	1302	1232	1370	1403	1359	1389	1513	1500	16,892

Vous remarquerez que le *minimum* n'a pas eu lieu une seule fois en juillet, qu'il tombe trois fois en avril, une fois en mai, et trois

fois en juin, et qu'en supposant ces quatre mois égaux, c'est encore juillet qui se trouve le plus chargé de naissances. Mais rappellez-vous les résultats que je vous ai fait voir sur mes tableaux manuscrits, qui prouvent que l'époque de ce *minimum* avance dans les pays méridionaux, retarde dans les pays septentrionaux, et rappelez-vous aussi que la ville de Livourne se trouve sous le 44° de latitude. Ainsi, la même loi se montre toujours; et si à Livourne le *minimum* des naissances ne s'observe pas en juillet, comme à Bruxelles, à La Haye, à Gand, à Amsterdam, etc., c'est à la marche de la température et à son intensité qu'il faut l'attribuer. Vous savez que plus les latitudes deviennent basses, plutôt le *maximum* des chaleurs se fait sentir : cette observation doit être rattachée au cas dont il s'agit. Je suis loin de prétendre toutefois que la température amène, seule et directement, une moindre aptitude à nous reproduire : je sais que, dans nos régions tempérées, les mois d'avril, mai, juin et juillet, suivant que l'on marche du midi vers le nord, sont justement ceux des plus nombreuses conceptions. Ce que je veux dire seulement, c'est qu'il existe un rapport bien certain entre la marche des saisons, le climat, d'une part, et, d'une autre part, l'intensité de la fécondité dans les divers mois. Quelques institutions sociales, l'époque des travaux, et la nourriture ont d'ailleurs une part réelle dans le phénomène qui m'occupe : ainsi, en Suède et en Finlande, c'est en décembre, saison du repos, des longues nuits, et, depuis quelque temps, d'une nourriture abondante, qu'a lieu le *maximum* des conceptions.

Vous trouverez pour Paris, dans le volume des *Recherches Statistiques* sur cette ville, que doit vous remettre M. *Villot*, la comparaison du nombre respectif des naissances dans les douze mois de l'année, pendant près d'un siècle : ce tableau ne comprend pas moins peut-être d'un million de naissances. Vous y verrez que mars, qui est un des mois chargés de conceptions, en avait de tous le moins, quand on observait avec rigueur l'abstinence du carême, et que c'est à dater des douze ou quinze dernières années du règne de Louis XV, que l'on s'en est relâché progressivement. Les mœurs d'un peuple, la mesure de ses opinions, sont donc quelquefois écrites dans les résultats de la Statistique; il ne faut que savoir les lire.

Je vous prie instamment de faire faire des recherches comparati-

vement sur la mortalité des enfans dans les cantons les plus exposés à l'influence des marais et dans d'autres qui n'y sont en rien soumis. Je compte toujours sur votre complaisance, si vous pouvez me procurer des résultats de vos prisons.

L'ouvrage dont nous allons nous occuper, concerne la *Description Statistique de la Gueldre* (*) : il est le résultat des recherches de la Commission d'agriculture de la province; il offre donc une garantie qui doit le rendre plus précieux pour les personnes qui seraient dans le cas de devoir y recourir. On y trouve, en général, des renseignemens sur tout ce qui concerne la position géographique de la Gueldre; la météorologie, la population, l'état de l'agriculture et du commerce, les habitudes sociales et religieuses des habitans, des données mêmes sur les principaux points historiques; en un mot, tout ce qui peut tendre à donner une connaissance intime de l'état physique et moral de la province.

Des résultats nombreux dont ce travail se compose, nous ne ferons connaître ici que ceux qui tiennent à la météorologie et à la population; et nous aurons soin de les rapprocher de ceux que nous avons déjà donnés dans nos cahiers précédens, pour d'autres provinces du royaume.

Les recherches météorologiques que présente la commission, ont été faites à Arnhem, par M. *E. J. Brantsen*, pendant les années 1815, 16, 17 et 18. Les observations du baromètre sont exprimées en parties du mètre, et celles du thermomètre sont faites d'après les divisions de *Farenheit*. Nous avons réduit ces dernières aux divisions de *Réaumur*, afin de les rendre comparables à celles qui ont été faites dans le Brabant (**). D'une autre part, la hauteur de la colonne barométrique, observée pendant 22 ans à Bruxelles, par M. *Kickx*,

---

(*) *Statistieke beschryving van Gelderland*, te Arnhem, by *P. Nyhoff*, in-8.° 1826.

(**) *Corresp. math.* numéro II, tom. II, pag. 100.

était exprimée en pouces et en lignes ; nous l'avons réduite en parties du mètre, comme cela se pratique généralement aujourd'hui. Nous nous sommes aussi contentés de prendre la moyenne des résultats obtenus pour les différentes années.

MOIS.	HAUTEURS DU THERMOMÈTRE A ARNHEM.			HAUTEURS DU THERMOMÈTRE A BRUXELLES.		
	max. moy.	*min. moy.*	*moyenne.*	*max. moy.*	*min. moy.*	*moyenne.*
Janvier...	6,4	— 4,7	0,8	1,5	0,5	1
Février...	7,4	— 3,1	2,1	3,5	2	2,75
Mars.....	10,7	0	5,3	7,7	4,7	6,2
Avril.....	15,6	1	8,3	9,5	7	8,25
Mai......	18	4	11	14	9,5	11,75
Juin.....	22	7,6	14,8	16,25	12,2	14,23
Juillet....	22,4	7,6	15	18,3	14,7	16,5
Août.....	21,1	7,2	14,1	16,5	12,5	14,5
Septembre.	19,8	4,4	12,1	13,7	8,3	11
Octobre ..	13,9	0,8	7,3	10,8	6,3	8,55
Novembre.	10,2	— 2,5	3,8	6,3	4,3	5,3
Décembre.	7,2	— 6,4	0,4	3	1,5	2,25
Moyenne.			7,9			8,52

Quoique les moyennes, pour les températures maxima et minima, offrent à Arnhem des différences beaucoup plus considérables qu'à Bruxelles, pendant les différens mois de l'année, cependant les températures moyennes sont à-peu-près les mêmes. La température moyenne de l'année dans les deux villes, diffère aussi très-peu de la température moyenne du mois d'octobre, comme cela s'observe assez généralement dans les autres pays. D'après des observations suivies pendant 40 ans, par le sieur *Brantsen*, il n'est pas rare de voir changer en un même jour, la température de 9 à 10 degrés ; le 13 juillet 1807, elle varia même de 13°,5. Ces changemens subits ont surtout lieu pendant l'été. On observa plusieurs fois à Arnhem, pen-

dant le mois de juillet le thermomètre à la hauteur de plus de 27 degrés, tandis que le 30 décembre 1783, il descendit à près de 16°,5 au-dessous de zéro. Le même phénomène se reproduisit en 1823.

MOIS.	ÉTAT DU BAROMÈTRE					
	A ARNHEM.			A BRUXELLES.		
	max.	min.	moyenne.	max	min.	moyenne.
Janvier....	774,3	735,5	754,9	758,0	751,2	754,6
Février.....	771,4	739,9	755,7	755,7	748,9	752,3
Mars......	770,8	734,1	752,5	757,3	751,2	754,3
Avril......	770,2	741,9	756,1	758,2	753,5	755,8
Mai.......	767,4	742,8	755,1	759,1	753,5	756,3
Juin.......	764,7	746,1	755,4	760,3	754,1	757,2
Juillet.....	762,5	747,8	755,2	759,6	751,7	755,7
Août......	763,5	744,3	753,9	759,6	751,2	755,4
Septembre..	764,7	744,9	754,8	759,1	753,5	756,3
Octobre....	767,5	745,0	756,8	755,7	750,5	753,1
Novembre..	774,1	746,1	760,1	756,2	747,1	752,2
Décembre..	772,2	737,0	754,6	757,3	749,6	753,5
Moyenne.			755,4			754,7

On voit, par ce tableau, qu'en se transportant de Bruxelles à Arnhem, l'élévation moyenne de la colonne barométrique est assez peu sensible. Les observations à Bruxelles étaient faites à environ 26 mètres au-dessus du niveau ordinaire du canal : il eût été à désirer qu'on eût aussi pris soin d'indiquer la hauteur à laquelle M. *Brantsen* faisait les siennes. Le baromètre comme le thermomètre, est sujet dans la Gueldre et les pays voisins, à des variations assez grandes : d'après les observations de M. *Brantsen* et d'après celles de *Musschenbroeck, Boerhaave, Van Swinden* et *de Kanter*, les hauteurs peuvent offrir des différences de 7,85 centimètres. *Van Swinden* observa le baromètre à la hauteur de 779,9, le 7 janvier 1779 à Franeker, et M. *de Kanter* l'observa à 706, à Middelburg.

MOIS.	ÉTAT DES VENTS							
	A ARNHEM.				A BRUXELLES.			
	S. à l'O.	O. au N.	N. à l'E.	E. au S.	S à l'O.	O. au N.	N. à l'E.	E. au S.
Janvier..	15	5	6	5	12	8	10	1
Février..	13	6	3	6	17	5	5	1
Mars....	18	5	5	3	17	6	7	1
Avril....	7	7	10	5	10	9	11	0
Mai.....	10	7	8	6	14	8	7	2
Juin....	12	8	5	5	11	7	8	4
Juillet..	14	9	2	6	13	6	7	5
Août....	12	10	1	7	15	7	5	4
Septemb.	11	4	5	11	9	9	10	2
Octobre..	8	3	10	10	18	6	6	1
Novemb.	15	3	6	6	16	4	9	1
Décemb.	15	6	5	5	14	9	7	1
	150	73	66	75	166	84	92	23

Il paraît d'après le plus grand nombre d'observations faites dans la Gueldre et les environs, qu'on peut poser en fait que les vents du nord, dominent pendant le printemps, ceux d'ouest pendant l'été, ceux du sud pendant l'automne, et enfin ceux d'est pendant l'hiver; tandis que les vents de sud-ouest prédominent toujours.

M. *Brantsen*, ne compte à Arnhem, année commune, qu'environ huit jours de neige et 179 de pluie, tandis que M. *Kickx* a trouvé pour Bruxelles, 17 jours de neige et 149 de pluie.

Les pluies sont, pour l'ordinaire, amenées par des vents d'ouest, de sud-ouest, ou de nord-ouest : elles paraissent règner à Arnhem, plus particulièrement pendant l'été, et à Bruxelles, vers le commencement du printemps. Quant aux brouillards, c'est pendant les mois de novembre, décembre et janvier, qu'ils règnent le plus dans la Gueldre, mais surtout pendant le mois de janvier : il est à remarquer

cependant qu'ils sont bien moins fréquens que dans les provinces dont le sol est plus abaissé.

Après avoir cité les principaux élémens qui concernent la météorologie, nous nous occuperons de ceux qui se rapportent à la population. A la fin de décembre, en 1824, on comptait dans la Gueldre 44418 maisons, dont 41519 étaient soumises aux impositions : les autres, au nombre de 2899, n'étaient sujettes à aucune taxe. La population se composait de 283407 ames, savoir 141892 femmes et 141515 hommes; parmi ces derniers, 62057 avaient moins de 18 ans; 55401 comptaient de 18 à 50 ans; enfin 24057 individus avaient dépassé l'âge de 50 ans.

En partageant la population d'après les mariages, on trouvait aussi que sur les 283407 individus qui existaient alors, 89305 étaient mariés, 177424 ne l'avaient point été, et 16678 étaient dans le veuvage. Parmi ces derniers, on comptait 6016 hommes et 10662 femmes. La population dans la Gueldre est croissante comme dans le reste de la Belgique. Voici un tableau qui l'indique suffisamment.

ANNÉES.	DU SEXE MASCULIN,		DU SEXE FÉMININ,		TOTAL.
	dans les villes.	dans la campag.	dans les villes.	dans la campag.	
1821	31990	103347	36751	99928	272016
1822	32586	104973	37146	101014	275719
1823	32987	106217	37709	101951	278864
1824	33400	108115	38288	103604	283407

Pendant l'année 1824, il naquit dans la Gueldre 5152 enfans mâles, et 4861 enfans du sexe féminin : on comptait parmi eux 9370 enfans légitimes, et 643 enfans naturels, en tout 10013 enfans. Le nombre des mariages pendant la même année, fut de 2113 : il y en eut 1688 entre garçons et filles, 222 de veufs avec des filles; 132 de veuves avec des garçons et 71 de veufs avec des veuves. Pendant le même intervalle de temps, il n'y eut que deux divorces. On compte aussi pendant la même année, 4948 décès, savoir : 2638 décès d'hommes et 2310 décès de femmes. Comme il pourrait être intéressant de comparer

les résultats de plusieurs années pour les villes et les campagnes, nous en allons présenter ici les tableaux.

ANNÉES.	NAISSANCES							
	MASCULINES,		FÉMININES,		LÉGITIMES,		ILLÉGIT,	
	villes.	camp.	villes.	camp.	villes.	camp.	villes.	camp.
1821	1318	3547	1212	3431	2258	6614	272	364
1822	1419	3681	1333	3458	2405	6752	347	387
1823	1264	3623	1321	3467	2300	6719	285	371
1824	1392	3760	1316	3545	2417	6953	291	352

On déduit de ce tableau, que le nombre des naissances légitimes est à celui des naissances illégitimes, dans les villes, environ comme 8 est à 1, et dans les campagnes, comme 18 est à 1; et le rapport des naissances masculines aux naissances féminines, comme 1000 est à 954.

ANNÉES.	DÉCÈS				MARIAGES		DIVORCES.
	MASCULINS,		FÉMININS,				
	villes.	camp.	villes.	camp.	villes.	camp.	
1821	914	2161	836	1925	518	1463	2
1822	964	2147	828	1928	571	1522	»
1823	784	2217	767	2008	532	1500	2
1824	817	1821	722	1588	557	1556	2

En ne considérant que les nombres principaux, il suit du tableau précédent que le nombre des naissances, a été à la population entière, pendant les quatre années de 1821 à 1824, comme 1 à 28 1/2. Le nombre des décès a été à la population, comme 1 à 49,5 et non à 57; et conséquemment le nombre des naissances est au nombre des décès, comme 49 1/2 est à 28 1/2, et non comme 2 est à 1. En dix ans de temps, c'est-à-dire, de 1815 à 1824, la population de la

Gueldre s'est augmentée de 23623 ames, ou de près de $\frac{1}{12}$ et non $\frac{1}{11}$ de sa valeur. Il suit aussi du tableau précédent, que la fécondité ou le rapport des naissances aux mariages, a été pour les villes 4,8, et pour les campagnes 4,7. Nous ne porterons pas plus loin ces conséquences et nous finirons en citant les résultats d'un tableau concernant les enfans vaccinés, pendant les dix années qui ont précédé 1825. Nous regrettons d'être hors d'état de citer en même temps le nombre des naissances qui ont eu lieu pendant le même espace de temps. Le nombre des enfans vaccinés, a été de 62110; celui des enfans qui ont été atteints de la petite-vérole, s'est élevé à 1356 dont 185 sont morts, c'est-à-dire, un peu moins du septième.

A. Q.

Annonce communiquée par M. GAMBART *à M.* QUETELET.

Une comète a été observée hier au soir à Marseille, dans la constellation du Bouvier, par $14^h\ 38^m$ d'asc. dr. et $36^\circ\ 1'$ de décl. boréale.

Cette comète est assez apparente, elle est accompagnée d'une légère lueur en forme de queue. (*Observatoire Royal, le* 29 *octobre* 1826.)

REVUE SCIENTIFIQUE.

La société des sciences de Harlem vient de faire paraître son programme pour 1825. Parmi les questions nombreuses qui sont mises au concours pour le 1.er janvier 1827, nous avons remarqué celles-ci qui peuvent concerner plus particulièrement nos lecteurs.

Comme on a reconnu par des observations que le feu et la flamme par un courant de vapeur d'eau, dirigé d'une certaine manière, prennent un accroissement de force notable, on demande : *Comment et dans quelles circonstances, on peut tirer parti de ces observations, pour augmenter l'intensité du feu, soit pour les besoins de la société, soit pour ceux des fabriques.*

La vapeur n'étant pas employée seulement comme force motrice dans les machines à feu, mais encore à différens autres usages, comme par exemple, dans les blanchisseries de fil, dans les serres, et même pour les besoins domestiques ; la Société demande : *pour quelles fabriques ou bien pour quels autres usages domestiques, on peut établir d'après des preuves certaines, que la vapeur peut être employée avantageusement.*

A. Q.

Liste des ouvrages publiés par Monsieur le professeur De Gelder, *et communiquée par M.* Verdam, *lecteur à l'Université de Groningue* (*).

1. Elémens d'Arithmétique, 2 vol. 372 pages, in-8.°, troisième édit. 1826.

(*) On trouvera dans notre prochain nnméro, l'analyse de ces ouvrages que nous devons à la complaisance de M. *Verdam.*

2. Elémens d'Algèbre; 1 v. in-8.° 500 pag. avec pl. 2.e éd. 1822.

3. Traité élémentaire d'Algèbre, à l'usage des Colléges royaux (*Écoles latines*); 1 vol. in-8,°, 263 pag. 1826.

4. Leçons d'Arithmétique et d'Algèbre, ou Leçons sur la théorie des nombres et des quantités algébriques; 2 vol. in-8.° 473 et 541 pag., avec pl. 2.e édit. 1825.

5. Elémens de Géométrie; 1 vol. in-8.° 602 pag. avec pl. 2.me édit. 1817.

6. Traité élémentaire de Géométrie théorique et pratique, à l'usage des élèves d'infanterie et de cavalerie de l'École militaire de Delft; 1 vol. in-8.° 292 pag. avec pl. 1816.

7. Traité de Géométrie théorique et pratique, 1.er vol. in-4.°, 348 pag. avec pl. 1806 (*).

8. Essai sur la théorie des quantités positives et négatives, 1 vol. in-8.° 243 pag. avec pl. 1815 (**).

9. Traité complet de la théorie des courbes et des surfaces courbes (*Mathesis sublimior*) 1.er vol. in-8.° 424 pag. avec 23 pl. 1824.

N. B. Le second volume est sous presse.

10. Principes du calcul différentiel et intégral, et du calcul des variations; 1.er vol. in-8.° 516 pag. avec pl. 1824 (***).

N. B. Le second volume paraîtra incessamment.

11. Mémoires de mathématiques, in-8.° 86 pag. avec pl. 1801.

12. Essai d'Analyse géométrique, 2 cahiers in-8.° 272 pag. avec pl. 1811.

13. Géographie universelle, contenant la Géographie astronomique et physique, d'après la traduction française de la Géographie universelle de *Guthry*. 2 vol. in-8.° 387 et 321 pag. avec pl. 1808.

14. Mémoire sur l'arrangement et l'usage du sextant de *Hadley*.

N. B. Ce mémoire quoique déjà imprimé et annoncé, ne paraîtra que dans l'année prochaine.

(*) Le second volume n'a pas encore paru.

(**) Déjà analysé par M. *Van Rees*, I.er vol. de la *Corresp.* n.° V.

(***) M. *Quetelet* à donné une idée de cet ouvrage, II.e vol. de la *Corresp.* n.° IV.

15. Mémoire sur le desséchement du Lac d'*Harlem*. 1 vol. in-8.° 1821 (*).

16. Dissertation détaillée sur la liaison des sciences naturelles et morales. 1 vol. in-8.° 466 pag. 1826 (**).

ANNONCES D'OUVRAGES.

Sur les Météores par M. J. G. Garnier, *professeur de Mathématiques et d'Astronomie à l'Université de Gand, etc. etc., in*-8.°, *de* 70 *pages* (***).

On peut s'étonner avec M. *Garnier*, de ne pas trouver dans les Traités modernes de Physique, dont le nombre s'accroît tous les jours, un chapitre où l'on traite avec détail des météores. Ces phénomènes dont la connaissance est d'un intérêt si direct pour l'homme qui doit chercher à se prémunir des ravages que causent les uns et à profiter de l'influence bienfaisante qu'exercent les autres, sont rélégués par la plupart des physiciens dans ce qu'ils appellent géographie physique, comme si le terme de la science qui les occupe, n'était pas la possibilité d'expliquer d'après des lois fondées sur l'observation, l'expérience et le calcul, les phénomènes qui se passent autour de nous, dans le sein de l'atmosphère, tout comme celui

---

(*) Nous ne ferons qu'indiquer cet ouvrage qui ne peut intéresser que les personnes qui connaissent les localités.

(**) Quoique le sujet paraisse étranger aux mathématiques, nous donnerons cependant un extrait de cette dissertation, pour faire connaître les idées de l'auteur sur l'enseignement de cette science.

(***) Chez Vandekerckhove, Éditeur, Avenue de la Place-d'Armes, n.° 5;

de l'astronomie est d'assigner l'état présent, passé et futur du système du monde. Il est vrai qu'à l'exception de la foudre, de la rosée et de quelques autres, les météores se dérobent assez généralement aux explications que peut fournir la physique telle qu'elle est aujourd'hui, et donnent lieu tout au plus à la description plus ou moins exacte de quelques faits dépourvus de tout lien systématique. Cependant quand on entreprend un Traité sur une science, on s'engage à la présenter telle qu'elle est, et nous pensons que M. *Garnier* a signalé une véritable lacune dans ceux qu'on a publiés depuis quelques années.

Un livre tel que celui que nous annonçons, devait nécessairement être fait avec d'autres livres : or, ici le mérite de l'auteur consistait principalement à exposer avec exactitude les différentes manières dont on a jusqu'aujourd'hui rendu compte des météores, à faire ressortir celles qui semblent ne rien laisser à désirer, à se borner à la description pure et simple des faits, là où on ne possède encore que des notions vagues, sous le rapport de la théorie, et enfin, à indiquer toutes les sources où peuvent puiser ceux qui voudraient faire une étude spéciale de la météorologie. Cette tâche a été religieusement remplie par M. *Garnier* qui a fait ainsi un livre utile à tous ceux qui s'occupent des sciences naturelles. Au reste, nous apprenons de l'auteur lui-même que cet écrit n'est qu'un premier essai qui sera suivi d'un ouvrage plus étendu pour la composition duquel il a déjà rassemblé un grand nombre de matériaux.

LEMAIRE.

Das planeten-system der sonne zum bequemen ueberblick der entferning, etc.

Le système planétaire du soleil, ou aperçu facile de l'éloignement, de la grosseur, de la position, de la vitesse des planètes et de leurs satellites; accompagné d'un texte explicatif et d'une instruction sur la manière de déterminer facilement et avec exactitude, au moyen

d'une construction, les élémens principaux du système planétaire, ainsi que les orbites des comètes, par *W. G. Lohrmann,* avec trois grandes planches en taille-donce. Prix 3 thalers, à Dresde, chez *Rittner.*

L'auteur espère que ce travail offrira aux personnes dépourvues de connaissances astronomiques, un moyen facile de s'instruire dans cette science et qu'il se recommandera aux professeurs, comme spécialement utile pour l'enseignement.

Volstændige praktische anweisung technische, etc., etc.

Instruction complette et pratique pour dessiner avec une rigueur géométrique des objets d'art, sous le rapport du contour, de la lumière et des ombres, par *Christian Auguste Gunther,* capitaine au corps royal du génie saxon, et professeur de dessin et d'architecture à l'Académie royale militaire de Saxe. Avec 8 pl. en taille-donce; Dresde, 1823; à la librairie Arnoldienne.

Cet ouvrage reconnu comme bon en Allemagne et déjà introduit dans l'enseignement de plusieurs établissemens d'éducation, offre une instruction claire pour dessiner rigoureusement sous divers aspects, des figures et des corps terminés par des lignes droites et courbes, distribuer la lumière et le clair-obscur, et construire d'une manière géométrique l'ombre projetée par les corps sous une lumière donnée.

Cet ouvrage d'un homme distingué et d'une instruction profonde, sera de la plus grande utilité non-seulement aux architectes et aux dessinateurs, mais encore aux ouvriers instruits; il les familiarisera avec la géométrie et leur applanira la voie pour bien dessiner la perspective.

L'introduction de l'ouvrage qui explique les divers genres de dessin, est suivie, dans la première division, d'une instruction très-étendue relative à la représentation des points, des lignes, des surfaces, des figures planes et des corps terminés par des surfaces planes et courbes.

La seconde division traite, en général, de l'éclairement des corps, de la détermination de la lumière et de l'ombre sur leur surface, et de la construction de l'ombre qu'ils projettent. Seize exemples suivent cette instruction, et huit belles planches en taille-douce ornent l'ouvrage et offrent la représentation des divers objets, en même-temps qu'elles contiennent avec une clarté suffisante les lignes de construction nécessaires pour le dessin et les ombres.

Art. communiqué par W. G. Lohrmann, et trad. par M. Lemaire.

Le Mécanicien anglais ou Description raisonnée de toutes les machines, mécaniques, découvertes nouvelles, inventions et perfectionnemens appliqués jusqu'à ce jour aux manufactures et aux arts industriels; mis en ordre pour servir de manuel-pratique aux mécaniciens, artisans, entrepreneurs, etc., par Nicholson, *ingénieur civil, traduit de l'anglais sur la dernière édition, revue et corrigée par* M*** *ingénieur, avec cent planches gravées par* Lallemand. 4 volumes in-8.°, *Paris*, 1826.

L'Angleterre, entrée la première dans la voie des améliorations et des perfectionnemens industriels, conserve sur les nations qui l'ont suivie, une supériorité non contestée. A ce titre, les ouvrages que la patrie des *Watt* et des *Arkwright* voit éclore en si grand nombre pour l'instruction des classes laborieuses, méritent l'attention de tous les peuples qui veulent ne pas rester en arrière de leur siècle, et prendre leur part dans les progrès de la civilisation. L'ouvrage de M. *Nicholson*, qui s'adresse spécialement aux mécaniciens, artisans, entrepreneurs, etc., se distingue, comme presque tous les ouvrages rédigés en Angleterre, dans le même but, par cette simplicité de style, cette absence de prétention qui annoncent si bien l'écrivain qui veut avant tout être utile.

Quel que soit notre respect pour le nom et l'autorité imposante de monsieur le baron *Dupin*, quelque convaincus que nous soyons de l'excellence de son Traité de géométrie et de mécanique appliquée aux arts, nous doutons (et nous pensons ne pas être seul de notre avis), que ce bel ouvrage ne soit plus propre à guider des professeurs dans l'enseignement des mathématiques appliquées aux arts, qu'à être consulté par des ouvriers. Quoiqu'on en puisse dire, il faut connaître plus que les quatre règles fondamentales de l'arithmétique pour l'entendre, et serait déçu dans son attentee celui qui en entreprendrait la lecture avec ce léger appareil de science. Les livres anglais, en semblable matière, et spécialement celui de M. *Nicholson*, nous semblent avoir cet avantage que plus sobres de théorie, ils compensent ce qui peut leur manquer quelquefois en rigueur, par des détails pratiques qui méritent d'autant plus de confiance, que l'industrie anglaise marche jusqu'ici sans rivale.

Les machines les plus compliquées qui paraissent incompréhensibles à ceux qui n'ont aucune connaissance en mécanique, ne sont, comme le dit notre auteur, à l'œil du praticien, que d'heureuses combinaisons d'un petit nombre de principes très-simples. Il a développé ces principes, en présentant d'abord quelques observations nécessaires sur les forces qui agissent sur la matière, sur le frottement et sur le centre de gravité, puis un Traité de ce qu'il appelle puissances mécaniques, c'est-à-dire, les machines simples. Après être entré dans les détails les plus nombreux et les plus satisfaisans sur les meilleures manières d'appliquer les forces mouvantes qui, comme on sait, résident dans les animaux, l'eau, le vent et la vapeur, il donne 1.° une Revue des *arts manuels*, 2.° un Traité de *l'art de bâtir*, avec un court Traité de *géométrie pratique*, 3.° un *Traité d'arpentage*, 4.° une Collection de *recettes*, et enfin une Description des *chemins en fer* et des *machines à transport*. Il est remarquable que l'auteur annonce, de plus, dans la préface traduite, un glossaire explicatif des mots techniques, et que ce glossaire ne se trouve pas dans la traduction.

LEMAIRE.

** Dans la Collection des manuels, formant l'*Encyclopédie des sciences et des arts*, chez *Roret*, libraire, rue Haute-Feuille, à Paris, et dont fait partie le Manuel de physique par *C. Bailly.*, qui a paru en 1825, se trouve celui d'Arpentage ou Instruction sur cet art et sur celui de lever les plans, par M. *Lacroix*, membre de l'Institut, auquel on doit savoir gré de coopérer à cette utile entreprise. L'auteur de ce dernier ouvrage, publié en 1826, a dû borner l'instruction élémentaire qu'il développe et qu'en effet il a su mettre à la portée de tout lecteur plutôt intelligent qu'instruit, à ce qui suffit strictement pour l'arpentage et la construction des plans qui s'y rapportent. Quant aux opérations d'un genre plus relevé, on en trouvera quelques notions dans les notes qui sont à la suite du présent manuel, et si, dit l'auteur, la lecture de cet ouvrage peut inspirer le désir de connaître à fond l'arpentage et l'art de lever les plans, j'aurai complettement rempli mon but, puisqu'il existe sur l'un et sur l'autre plusieurs Traités très-recommandables. A cette occasion nous citerons 1.° l'ouvrage de M. *Thiollet*, que M. De Mat, de Bruxelles, a réimprimé, et qui va plus loin que celui de M. *Lacroix*. 2.° La quatrième édition que vient de publier M. *Le Fevre*, de son Traité Géométrique de l'Arpentage, augmenté d'un Traité de géodésie pratique. Cette édition qui renferme des augmentations et des améliorations considérables, se compose de deux volumes, le premier de 500 pages, et le second de 44., avec vingt-huit planches gravées et parfaitement soignées. En retouchant cet ouvrage, dit l'auteur, j'ai fait un grand nombre d'additions et de changemens qui peuvent faire considérer cette édition comme un Traité entièrement neuf; il est divisé en deux parties dont chacune forme un volume : la première comprend tout ce qu'il est nécessaire de savoir pour former un bon arpenteur; elle traite aussi du levé des plans, du partage des terres, de l'aménagement des bois en coupes réglées, etc. etc., enfin, elle est terminée par un précis des opérations du cadastre. La seconde renferme les connaissances plus approfondies qu'exigent les opérations géodésique, et sur le nivellement, un article beaucoup plus complet que celui qu'on trouve dans les éditions précédentes. C'est un de ces ouvrages qu'on peut recommander en toute sûreté de conscience. Nous sommes dispensés de rappeler les Traités de Géodésie, de Topographie et d'Arpentage de M. *Puissant*, parcequ'ils sont connus

et que leur réputation est définitivement établie. Nous n'oublierons pas d'annoncer à ceux qui s'occupent des levés de plan et de la perspective, le Cours élémentaire de Dessin linéaire, appliqué à l'enseignement, d'après les principes de *Pestalozzi,* que publie en ce moment M. *Jobard,* de Bruxelles; il est suivi d'un Traité élémentaire de perspective linéaire, orné de 48 planches. Cet ouvrage est à sa quatrième édition, ce qui nous dispense de le recommander.

LES EDITEURS.

⁂ On n'a pas lu sans quelque surprise dans le n.° III des Annales de Nîmes, septembre 1826, annonce des livres nouveaux, Géométrie et Mécanique des arts et métiers et des beaux arts, par M. le baron *Ch. Dupin,* cette opinion de l'estimable rédacteur, M. *Gergonne* : « Si nous avions un vœu à émettre, ce serait celui de voir » substituer dans la plupart de nos Ecoles et *peut-être dans toutes,* » pour le plus grand nombre de ceux qui les fréquentent, l'ouvrage » de M. *Dupin,* et même des *ouvrages plus purement pratiques en-* » *core,* à *ces traités savans et sévères* qu'on peut appeler avec vérité, » suivant l'expression de *Montaigne,* de *grands souliers pour de petits* » *pieds.* Il résulte de notre manière de vouloir *enchaîner* invariable- » ment l'étude de la pratique à celle de la théorie, qu'après avoir » long-temps et péniblement étudié, les élèves sortent, pour la plu- » part, de nos écoles sans savoir ni l'une ni l'autre: fort heureusement » le mal n'a pas encore pénétré jusqu'à l'enseignement de la morale, » car alors les honnêtes gens seraient en bien petit nombre ». Nous conviendrons avec M. *Gergonne,* qu'il importe bien davantage de faire des honnêtes gens que des géomètres, quoiqu'on puisse être l'un et l'autre.

Suivant M. *Ferry,* l'un des rédacteurs de la Revue Encyclopédique, la nature et le but de l'ouvrage en question et de l'enseignement qu'il est destiné à propager, méritent la plus sérieuse attention, non-seulement de la part des professeurs, mais de tous les hommes qui

pensent, et *les hommes du monde* ne refuseront point d'être de ce nombre. Ainsi en prenant la désignation de *professeurs,* dans l'acception générale qu'elle présente, l'opinion de M. *Ferry* viendrait réconforter celle de M. *Gergonne,* ce qui n'est pourtant pas une raison pour l'adopter : car on nous accordera qu'on peut très-bien juger si tel livre va droit au but, sans être en état de le faire ou même de l'amender. J'observerai donc, en premier lieu, que les ouvrages classiques que proscrit M. *Gergonne,* sont *sévères,* sans être *savans,* et que celui qu'il recommande, est *savant* sans être *sévère;* c'est une assertion qu'il me serait facile de justifier, si j'étais requis de le faire. Que si, comme le dit M. *Gergonne,* dans ceux là, on a *enchaîné* invariablement l'étude de *la pratique* à celle de *la théorie* (ce qui ne peut se dire des Traités connus dans lesquels on ne trouve guères que des applications spéculatives), dans celui-ci, elles se trouvent engrénées ou plutôt mêlées de manière à faire une espèce de bazar scientifique. Mais si l'éloge a ses inadvertances, c'est surtout quand il s'adresse à un ouvrage en faveur duquel on met tous les autres à l'index, et qui cependant ne contient ni l'arithmétique, ni l'algèbre, ni les trigonométries, ni les sections coniques, quand cependant la lecture des deux tiers de l'ouvrage, requiert continuellement les connaissances groupées sous tous ces titres. J'avoue que je ne découvre pas le côté fort de ce passage de l'analyse du traité en question, par M. *Ferry* (Rev. Encycl.) : « On n'aurait pu l'introduire (la Géo» métrie descriptive) dans l'enseignement, si l'on avait conservé l'écha» faudage des théorèmes, corollaires et scolies, ainsi que les fatigantes » et presque toujours inutiles démonstrations des propositions inverses. » Les Anglais qui ont persisté avec une sorte d'obstination dans les » vieilles habitudes d'instruction mathématique, n'ont point rédigé » la *Géométrie des arts,* quoiqu'elle fut répandue dans leurs ateliers » et leurs chantiers : les ouvriers l'y apprenaient et continuent » encore à l'apprendre, non comme une science, mais comme un » art, avec plus de temps et de peines, et moins bien. Sur le premier chef, je répondrai que, dans le temps, on a félicité les auteurs de plusieurs Traités élémentaires, de l'heureuse innovation faite par eux, en introduisant les élémens de la Géométrie descriptive dans leurs ouvrages, et que si les *théorèmes, corollaires, scholies* et *inverses* font échafaudage, c'est qu'il faut un échafaudage pour s'élever. Quant aux

Anglais, je pense, sauf meilleur avis, qu'ils ont commencé par le commencement, et qu'on veut nous faire commencer par la fin. Nos professeurs de Géométrie appliquée aux arts, paraissent incliner vers la méthode anglaise, perfectionnée; car ils ne sont pas exclusifs. Et grâce à un dernier décret de Sa Majesté le Roi des Pays-Bas, qui n'est pas calqué sur les arrétés de l'Université de France, l'instruction mathématique va pénétrer aussi avant qu'il est possible, et cette instruction convenablement modifiée et administrée d'ailleurs avec discrétion, étendra son influence aux fabriques et aux professions mécaniques, qui peuvent en tirer quelques secours.

J. G. G.

*** M. *Prony* propose d'adopter pour l'*unité dynamique*, l'élévation de 10000 kilogrammes à 10 mètres de hauteur pendant la durée d'un jour moyen; il propose aussi pour *unité hydraulique*, la fourniture de 10 mètres cubes d'eau, ou 10000 kilogrammes en poids, pendant un jour moyen. Ces deux unités qui se lient parfaitement avec les autres parties du système, offrent de plus cet avantage que les deux élémens de la seconde, sont la réunion du premier et du troisième élément de l'unité dynamique. Jusqu'ici il y a eu indétermination de l'unité dynamique employée pour mesurer la force des machines : on se borne en effet, à comparer cette force avec celle d'un cheval, sans entrer dans aucun détail sur l'évaluation de cette dernière qui peut varier dans des limites assez étendues. Une autre cause d'erreur dans un pareil mode d'évaluation, peut provenir de ce que, lorsqu'on parle d'une machine (de la force de six chevaux, par exemple), on pourrait croire qu'il s'agit d'une machine avec laquelle on ne peut exécuter que le même travail dont six chevaux seraient capables en un jour : mais il n'en est pas ainsi; car les chevaux ne pouvant travailler que le tiers de la journée, quand la machine agit pendant les 24 heures, il en résulte qu'avec cette dernière, on obtient le résultat qu'on pourrait attendre de dix-huit chevaux.

Il sera fait au ministre un rapport, pour l'engager, s'il y a lieu, à employer les moyens qui sont à sa disposition, afin de rendre seules légales et obligatoires les deux unités précédentes qui completteraient le système métrique. (Ann. Univ. de Bruxelles, 3 septembre 1826.)

Nous sommes convaincus que le ministre saisira enfin cette occasion d'attacher son nom à quelque chose de stable.

J. G. G.

⁂ Traité du calcul conjectural, ou l'Art de raisonner sur les choses futures et inconnues, par *Sébast. Ant. Parisot,* ouvrage in-4.° de 642 pages, avec 2 planches et cette épigraphe :

> Ut in seminibus vis inest earum rerum quæ ex iis progignuntur, sic in causis conditæ sunt res futuræ. Cicero *de divinatione.*

Lorsque cet ouvrage parut en 1810 (*), on avait de fortes raisons de croire que le gouvernement français se proposait d'établir à l'Ecole normale, *une chaire pour le calcul des probabilités,* parce qu'on sentait l'importance de faire réfleurir cette branche de l'analyse qui offre les applications les plus étendues et les plus importantes. Alors la France ne possédait pas encore le *Traité ex professo* sur cette partie de l'instruction publique. Ne voulant être ni traducteur ni imitateur servile, l'auteur a rassemblé ce qu'il y avait de plus remarquable dans l'ouvrage de *Jacques Bernoulli* (Ars conjectandi); dans celui de *Moivre* (The doctrine of chances). Cependant ces deux probabilistes s'étant plus attachés à la doctrine qu'aux applications, il a dû consulter l'Analyse des jeux de hasard par *Montmort;* l'Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine par *De Parcieux;* les Recherches de M. *Dupré de Saint-Maur,* l'Arithmétique morale de *Buffon,* etc. Mais il ne suffit pas qu'un livre renferme la substance de tous ceux

(*) *La Théorie analytique des probabilités,* par M. Le comte *Laplace,* n'a paru qu'en 1812.

publiés sur la même matière, il faut encore qu'il offre une meilleure ordonnance et une plus forte dose d'instruction; c'est ce qu'on trouve réuni dans celui que nous annonçons. L'ouvrage est divisé en quatre parties 1.° Théorie des probabilités, qui contient cinq chapitres : 2.° Applications des principes à l'analyse des jeux de hasard, aussi divisées en cinq chapitres : 3.° Applications des principes à la solution des questions d'économie politique et commerciale; trois chapitres : 4.° Applications des principes à la solution de diverses questions récréatives et curieuses : on y trouve l'analyse et la solution des cinq problêmes du célèbre *Huyghens*, celle du problême de Pétersbourg, et ici comme dans les autres parties de l'ouvrage, le rédressement de quelques méprises des probabilistes et la généralisation de quelques-unes de leurs solutions. Le tout se termine par un appendice ou l'auteur essaie d'appliquer le calcul conjectural à la physique systématique et à la métaphysique. L'ouvrage en question ne suppose qu'une algèbre à la portée de tout lecteur. Cette branche d'analyse est généralement regardée comme la plus propre à donner à l'esprit cette sagacité et au jugement cette solidité et cette rectitude sans lesquelles la perfectibilité intellectuelle n'est qu'une chimère: pourquoi donc ses premiers élémens ne seraient-ils pas incorporés dans notre enseignement universitaire, comme le fait mon collaborateur M. *Quetelet*, dans ses leçons publiques au Musée de Bruxelles. On s'apercevra sans doute, dit l'auteur, que j'ai donné aux tables de mortalité une forme tout-à-fait neuve, qui permet de résoudre, à la seule inspection, toutes les questions possibles sur la population, la durée moyenne et probable de la vie, les rentes viagères simples ou en tontine, les annuités, amortissemens, arrérages, etc. Cette partie de l'ouvrage ne doit pas paraître la moins intéressante aujourd'hui que le gouvernement s'occupe de la confection d'un cadastre général, et de l'organisation d'un travail uniforme, afin de se procurer sur la statistique morale et physique, des documens que les mathématiques utiliseront, en les faisant servir comme autant de degrés pour s'avancer vers la perfection de toutes les institutions sociales. Comme l'a dit *Dalembert*, les hommes appelés à gouverner les autres, et à changer la face des empires, ont une scienee qui leur est propre et qui est incommunicable, parce qu'elle s'élève trop au-dessus de la sphère commune : aussi le calcul conjectural n'atteint point aux

hauteurs de la politique; il trouve son application seulement dans la partie purement économique de cette science; et c'est à quoi les auteurs doivent se borner.

J. G. G.

*** M. *B. Renard,* de Tournay ancien élève de la faculté des sciences physiques et mathématiques de l'Université de Gand, et maintenant employé au ministère de l'intérieur, section des mines, vient d'être proclamé docteur en sciences, à la suite de la defense de sa dissertation, ayant pour titre : *de Barometro et de ipsius formularum principiis.* Nous rappelerons à cette occasion, sa *Notice historique sur le Baromètre,* insérée (*Corresp.* tom. I, pag. 93) par laquelle il préludait à sa réponse à la question proposée par l'Université de Liége (*Corresp.* tom. I, pag. 249), question remise au concours. La dissertation en question est divisée en trois chapitres, sous les titres 1.° *Pars historica;* 2.° *Physices formularum principia;* 3.° *Formulæ Barometricæ.* Nous regrettons de ne pouvoir appliquer à cette composition, ces deux vers d'*Horace* :

> Verum ubi plura nitent in carmine, non ego paucis
> Offendar maculis, etc.

Dailleurs le candidat a défendu ses positions avec autant d'esprit que de gaîté, d'où il ne faut pourtant pas inférer qu'il ait toujours eu l'avantage sur ses adversaires.

Au reste, l'examen de docteur de M. *Renard,* toute compensation faite, lui avait mérité, de la part de la faculté, des éloges qui dûrent le flatter d'autant plus que l'épreuve qu'il venait de subir, avait été plus sévère.

J. G. G.

Questions proposées par l'Université de Liége.

1.° Exponantur et exemplis illustrentur præcipuæ *eliminationis* methodi inter duas æquationes primi et altiorum graduum.

2.° Concinne et accurate exponantur phænomena electrochemica, atque dijudicentur theoriæ, quæ ad ea explicanda fuerunt excogitatæ.

Questions à résoudre.

1° Inscrire un octogone régulier dans un carré, en ne faisant usage que de la demi-diagonale du carré.

2° Démontrer que la projection d'une section plane quelconque d'un paraboloïde de révolution, sur le plan tangent au sommet, est un cercle; ou, plus généralement, connaissant la position du plan sur le quel les projections des sections planes sont des cercles, trouver celle de l'axe de révolution.

3° Deux plans sont assujettis à passer chacun par une droite fixe (ces deux droites n'étant pas dans un même plan), on les fait mouvoir autour de ces droites de manière qu'ils sont constamment perpendiculaires entre eux, on demande le lieu des intersections successives de ces plans, c'est-à-dire, l'équation et la discussion complète de la surface qui en résulte.

4° Dans tout polyèdre, la somme des angles plans des faces, vaut autant de fois quatre droits, qu'il y a d'angles polyèdres moins deux ; ou autant de fois quatre droits, qu'il y a d'arrètes moins le nombre de faces.

5° Tout nombre premier ne diffère que d'une unité d'un multiple de 6.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Sur le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre.

On trouve dans le n.° V, novembre 1826, des *Annales de Mathématiques de M. Gergonne*, la démonstration de ce théorème :

Soient posés *zéro* et *un* pour les deux premiers termes d'une suite ; soit continuée cette suite, en faisant alternativement chacun de ses termes, égal à la demi-somme et à la racine carrée du produit des deux termes qui le précèdent immédiatement, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à deux termes consécutifs qui se ressemblent dans plus de la moitié de leurs chiffres de gauche ; divisant alors *six* par le premier de ces termes, augmenté du double de l'autre, on obtiendra pour quotient le rapport d'un cercle à son diamètre. M. *Schawab* a démontré que les termes de cette suite, convergent sans cesse vers le rayon du cercle dont la circonférence est *quatre* (pag. 192 du VI.° volume du même recueil).

Nous avons reçu de M. *W. H. Cost Jordens*, juge-de-paix à Deventer, et de M. *J. Daubresse*, élève en sciences à l'Université de Louvain, deux solutions du probl. n.° 1, pag. 256, vol II de la *Corresp.* : nous en donnerons la substance.

En posant (*fig.* 76) $ab = \mathrm{D}$, $bd = d$, d'où $ad = \mathrm{D} - d$, M. *Jordens*, trouve cette expression de l'aire entre les trois demi-cercles ; savoir :

$$\frac{\pi d}{4}(\mathrm{D}-d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Soit l'angle $hce = \varphi$, on a $\sin.\ \varphi = \frac{he}{ce} = \frac{d - \frac{1}{2}\mathrm{D}}{\frac{1}{2}\mathrm{D}}$, d'où $\cos.^2 \varphi = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{D}^2 - (d - \frac{1}{2}\mathrm{D})^2}{\frac{1}{4}\mathrm{D}^2}$; d'ailleurs le triangle hce donne $ch = lk = \frac{1}{2}\mathrm{D}\cos.\ \varphi$. Or, en désignant par S l'aire du cercle décrit sur lk, comme diamètre, il vient, après quelques réductions,

$$\mathrm{S} = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{D}^2\pi\cos.^2\varphi}{4} = \frac{\pi d}{4}(\mathrm{D}-d)$$
$$= d(\mathrm{D}-d) \times 0{,}78539.$$

M. *Daubresse* en désignant la tangente mn par d (*fig* 77), par a, b et c les diamètres du grand et des deux autres cercles, et après avoir posé la condition

$$\pi d^2 = \frac{1}{2}\pi(a^2 - b^2 - c^2)$$

qui, à raison de $a = b + c$, se réduit à $d^2 = bc$, prouve qu'en effet cette relation a lieu. Il observe que le cercle D qui coupe les deux cercles B et C, le premier en m, le second en n, passe encore par le contact r des deux derniers cercles.

Nous avons cru ne devoir pas nous étendre davantage sur ces deux solutions, parce qu'il est maintenant facile de suppléer les détails omis.

Sur le maximum du nombre de sphères qui peuvent entrer en contact avec une sphère centrale de même diamètre, par M. CHARL. TANDEL, *régent au Collége d'Echternach* (*).

1.° Démontrer qu'une circonférence peut être touchée extérieurement par six cercles de même rayon, qui se touchent entre eux (*fig.* 78).

(*) L'auteur ayant trouvé l'énoncé de cette propriété dans *les proportions*

Considérons les cercles 1, 2 et 3 (*fig.* 78). Le trapèze *abcd* comprend la moitié du cercle central *c* (*fig.* 79), et le trapèze *a'b'c'd'* supposé égal au trapèze *abcd*, comprend également la moitié du cercle 2, égal au cercle central *c*.

Pour le prouver, recourons aux deux triangles $p'cd$ et $pc'd'$: dans le triangle $p'cd$, l'angle p' a pour mesure

$$\frac{knm - klm}{2} = \frac{\frac{8}{12} - \frac{4}{12}}{2} = \frac{4}{24}$$

l'angle d a pour mesure

$$\frac{mlh' - \text{arc. } mf'}{2} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{1}{12}}{2} = \frac{4}{24}$$

l'angle c a pour mesure

$$\frac{klf' - \text{arc. } kh'}{2} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{1}{12}}{2} = \frac{4}{24}$$

Dans le triangle $pc'd'$, l'angle p a pour mesure

$$\frac{qot - qlt}{2} = \frac{\frac{8}{12} - \frac{4}{12}}{2} = \frac{4}{24}$$

l'angle d', a pour mesure

$$\frac{tlr - \text{arc. } st}{2} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{1}{12}}{2} = \frac{4}{24}$$

l'angle c', a pour mesure

$$\frac{qls - \text{arc. } qr}{2} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{1}{12}}{2} = \frac{4}{24}.$$

Comme les angles du triangle $pc'd'$ ont pour mesure le même nombre de $\frac{1}{24}$ que les angles du triangle $p'cd'$, et comme d'ailleurs les circonférences sur lesquelles on mesure ces angles, ont même rayon, il s'en suit que tous les angles des deux triangles, ont la même mesure et que par conséquent ces deux triangles sont égaux.

Retranchant maintenant de chacun des grands triangles $p'cd$ et $pc'd'$

---

chimiques de *Berzelius*, en a, dit-il, cherché long-temps la démonstration qu'il a enfin trouvée et qu'il nous a adressée pour être insérée dans la Correspondance. LES ÉDITEURS.



les deux petits triangles $p'ab$ et $pa'b'$ qui sont égaux, comme ayant chacun de leurs côtés égaux au rayon; il s'en suit *que les restes qui sont les deux trapèzes, sont aussi égaux.*

Les triangles $pd'g'$, $pc'i'$ sont égaux au triangle $pc'd'$ par les mêmes raisons.

OBSERVATION.

L'auteur donne deux autres démonstrations de l'égalité des deux triangles $pc'd'$ et $p'cd$ et des trapèzes $abcd$ et $a'b'c'd'$. « De ce que, « dit-il, la demi-circonférence $h'b'a'f'$ donne lieu à trois de ces » trapèzes égaux, chacun de ces trapèzes circonscrivant la moitié d'un » cercle de contour, il s'ensuit qu'on peut placer sur la demi- » circonférence trois cercles en contact réciproque; donc sur la » circonférence entière on en peut placer six. » Or, ayant trouvé plus haut dans le triangle $pc'd'$, l'angle $c'pd'=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$, il s'ensuit naturellement qu'il y a lieu a six cercles extérieurs en contact avec le cercle central et entre eux. D'ailleurs si l'on joint les centres p et p' et qu'on mène au contact q le rayon $p'q$, on a $pq=\sqrt{\overline{pp'}^2-\overline{p'q}^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, en faisant le rayon des cercles, égal à l'unité; or $\sqrt{3}=\text{tang.}\,60^\circ=\text{tang.}\,qp'p$; donc ang. $qpp'=30^\circ$, et angl. $qpt=60^\circ=b'pa'$.

Cela posé, l'auteur conclut qu'on peut mettre six sphères 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (*fig.* 78), en contact entre elles et avec la sphère C de même diamètre, suivant le grand cercle 1' 2' 3' 4' 5' et 6' de cette dernière : il démontre ensuite qu'il y a lieu à six autres sphères de même rayon, en contact avec les précédentes; d'où résulte la propriété annoncée. Mais pour abréger, nous nous bornerons ici à montrer la possibilité de placer les six autres sphères suivant la condition énoncée. A cet effet, ne considérons que l'hémisphère supérieur de la sphère centrale C, et notons par P le pôle du cercle C: si l'on imagine les trois arcs de grands cercles Pn, Pp et Pr, on aura les trois demi-fuseaux nPp, pPr, rPn, et il est visible que les trois sphères cherchées doivent toucher l'une les sphères 2 et 3, la seconde les sphères 4 et 5, la troisième les sphères 6 et 1; qu'elles se toucheront entre elles, et enfin qu'elles toucheront la sphère centrale dans chaque demi-fuseau.

Même construction sur l'hémisphère opposé. Ces trois sphères projetées sur le cercle central C (*fig.* 80), donneront trois cercles A, B et D, de même rayon, qui se toucheront ; le centre de la sphère C, projection du pôle P, sera dans l'aire du triangle sphérique entre les trois points de contact. On peut aussi projeter sur le même plan, les arcs de grands cercles décrits, par exemple, sur la sphère 1 (*fig.* 78), entre les deux contacts t et t' de cette sphère par les sphères 2 et 6 et le contact de la sphère 1 par celle des trois dernières sphères qui la touchent : on aurait ainsi dans le même plan de projection, celui du cercle central C (*fig.* 80), six arcs dont deux consécutifs, toucheraient par la convexité, chacun des trois cercles A, B et C ; ces arcs s'appuyant sur six arcs égaux de la circonférence centrale C. Il est presqu'inutile d'observer que toutes ces sphères, en comptant la sphère centrale, forment des groupes de quatre sphères qui se touchent. Comme nous pensons avoir donné une idée suffisante des recherches de l'auteur, nous nous croyons dispensé d'y revenir par la suite.

J. G. G.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Mener une tangente à une ellipse dont le centre est donné; par M. VERDAM, *Lecteur à l'Université de Groningue.*

On démontre que si l'on a une ellipse (*fig.* 81) et un cercle décrit sur son grand axe AB, et si l'on prolonge l'ordonnée QP jusqu'à la rencontre en p du demi-cercle, les tangentes en P et p se coupent dans le même point T du grand axe AB. On peut établir cette propriété comme il suit. Imaginons que le demi-cercle ApcB tourne autour du diamètre AB et au-dessus du plan de la planche, jusqu'à ce que le point c vienne se placer verticalement au-dessus de C; la demi-ellipse sera la projection horizontale du demi-cercle : notons par p' la nouvelle position de p, laquelle sera projettée en P, et concevons la tangente en p' : cette tangente qui rencontre BA en T, sera située dans le plan vertical p'PT, et elle aura pour projection horizontale PT qui sera la tangente en P. Donc etc.

Qu'on se propose maintenant de mener une tangente au point P d'une ellipse (*fig.* 82) dont on connaît seulement un diamètre quelconque AB : la chose se réduit à découvrir le grand axe, et, à cet effet, du centre O de la courbe et du rayon OB$=\frac{1}{2}$AB, on décrira le cercle AdbB qui coupera l'ellipse en b; des centres B et b et d'un rayon arbitraire, on décrira deux arcs qui se couperont en o; la droite menée par o et O déterminera le grand axe EF. En effet, on sait que dans l'ellipse, toute corde perpendiculaire à l'axe, est divisée également par cet axe : or, d'après la construction, les points

o et O sont équidistans des points B et *b* de la corde B*b*; donc EF est perpendiculaire sur la corde B*b* et passe par son milieu *a*.

Démonstration du théorème énoncé n.° 1, page 192, vol. II (Corresp.), *par M.* J. D'Aubresse, *élève en sciences à l'Université de Louvain.*

Dans l'hyperbole, la portion d'asymptote interceptée entre deux tangentes quelconques, est divisée en deux segmens égaux par la corde de contact.

La démonstration de cette propriété est fondée sur ces deux principes connus :

1.° *Une tangente à l'hyperbole terminée aux asymptotes, est divisée au point de contact, en deux parties égales.*

2.° *Si une droite quelconque coupe une hyperbole, les portions de cette droite, comprises entre les asymptotes et la courbe, sont égales.*

Soient donc (*fig.* 83) AD et AG les asymptotes de l'hyperbole donnée, DE et FG les deux tangentes à cette hyperbole aux points B et C; si par le point B je mène BK parallèle à l'asymptote AG et par le point C une ligne CL parallèle à l'autre asymptote, il arrivera que le point K sera le milieu de AD, c'est-à-dire, qu'on aura AK = KD, ce qui résulte de la similitude des triangles BDK et ADE et de l'égalité des parties EB = BD : de même AL = LG. Maintenant remarquons que les deux triangles BKH et CLI sont égaux, parce qu'ils ont les côtés CI et BH égaux, l'angle LCI égal à l'angle BHK et l'angle KBH égal à l'angle LIC comme correspondans; donc LC = HK et IL = KB; ensuite au moyen des triangles semblables DKB et DAE, GCL et GFA, nous obtenons les proportions :

$$\text{DK} : \text{AD} = \text{BK} : \text{AE}$$
$$\text{GL} : \text{AG} = \text{CL} : \text{AF}$$

qui reviennent à celles-ci :

$$\text{DK} : 2\text{DK} = \text{BK} : \text{AE}$$
$$\text{GL} : 2\text{GL} = \text{CL} : \text{AF};$$

d'où nous devons conclure que AE est double de BK et AF double

de CL; mais parce que $CL = HK$ et $IL = BK$, nous aurons $AF = 2HK$ et $AE = 2IL$; or

$$DK = AK, \; DH + HK = KF + AF, \; DH + HK = KF + 2HK :$$

donc $DH = KF + HK$; ou $DH = FH$ (*). Donc enfin la portion FD de l'asymptote, comprise entre deux tangentes quelconques, est divisée en deux segmens égaux par la corde CB de contact.

Nous passerons à d'autres relations entre les asymptotes, les tangentes et la corde de contact.

L'on sait d'abord que

$$(1) \ldots\ldots\ldots \; AF = 2AK - 2HF, \; AE = 2AL - 2IE \ldots\ldots (2)$$

Mais comme KB est parallèle à AI, les deux triangles BHK et AHI sont semblables; on a donc la proportion

$$AK : KH = IB : BH, \text{ ou } AK : DK - DH = IB : BH$$

le triangle AIH coupé par la parallèle LC, donnera

$$AL : IL = CH : IC, \text{ ou } AL : GL - GI = IB : BH.$$

De ces proportions dérive la suivante

$$AK : DK - DH = AL : GL - GI$$

qui revient à celle-ci

$$AK : AK - HF = AL : AL - EI.$$

en observant qu'on a trouvé plus haut, $DK = AK$, $HD = HF$ et qu'il a été prouvé que $IG = EI$.

Cette dernière a dû provenir de cette autre

$$AK : HF = AL : EI$$

dans laquelle si $AK = m\,HF$ (m étant un nombre indéterminé, entier ou fractionnaire, rationel ou irrationel), on aura aussi $AL = m\,EI$;

(*) Ici l'auteur observe que les points F et K peuvent avoir relativement au centre de l'hyperbole, trois positions différentes : 1.° le point F peut tomber en deçà du point K; au-delà; ou sur ce point même, et il démontre que la propriété a toujours lieu. Comme ces détails peuvent être aisément rétablis, nous les supprimerons, pour passer à la suite de son article qui renferme des propriétés curieuses.

J. G. G.

alors les équations (1) et (2) se transforment comme il suit :

$$AF = (2m - 2)\,FH,\ AE = (2m - 2)\,EI$$

Nous tirerons de ces égalités la proportion

$$AF : FH = AE : EI \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

On peut donc conclure que si l'on joint les points E et F par la ligne EF, cette ligne sera parallèle à la ligne IH, ou à la corde de contact.

De la proportion (3), on déduit

$$AF + FH : FH = AE + EI : EI$$

ou bien, à cause de FH = DH et EI = IG,

$$AH : DH = AI : IG.$$

Cette dernière proportion nous avertit que DG est aussi parallèle à la corde de contact.

En observant qu'alors les deux triangles EFO et BCO sont semblables, on pourra dire que les angles BCP et AFE sont égaux, ainsi que les angles AEF et PBC; car BCP = OCP — OCB, AFE = AFO — EFO; mais OCP — OCB = AFO — EFO; donc BCP = AFE. En raisonnant de même, on trouvera que AEF = PBC : on a, en outre, FAE = BPC; donc les triangles AFE et BCP sont semblables; mais puisque les quadrilatères AEOF et BOCP sont composés chacun de deux triangles semblables et semblablement disposés, nous pouvons conclure que ces quadrilatères sont semblables, et partant que les triangles AFO et OCP sont aussi semblables (on a joint A et P avec O par les droites AO et OP).

On a donc l'angle AOF = COP; mais parceque FC est une ligne droite, AOP devra aussi être une ligne droite, à cause de l'égalité des angles AOF et POC qui sont opposés par le sommet.

Si au lieu de mener les parallèles CL et BK, on eut mené les parallèles CL′ et BK′ aux asymptotes AG et AD, le point P′ fut encore tombé sur la ligne AP; car il est facile de voir que, par la similitude des parallélogrammes AKPL et P′BPC et leur situation respective, leurs diagonales AP et P′P se confondent et forment une seule droite. On a donc cette propriété :

Si l'on a deux tangentes à l'hyperbole et que par les points de contact, on mène des parallèles aux deux asymptotes, qui se coupent

deux à deux, les points P et P′ d'intersection de ces parallèles; le point O de concours des deux tangentes et le centre A de l'hyperbole, se trouveront sur une même ligne droite AP′ OP.

En continuant, on trouvera

$$DB : BE = DP : PG,$$

mais l'on se rappelle que DB = BE, donc DP = PG.

On trouvera de la même manière que EP′ = FP′. Donc les lignes qui joignent les points où les tangentes coupent les asymptotes, passent par les points P et P′ qui les partagent en deux parties égales.

La ligne qui joint les points de contact, est aussi divisée en deux parties égales par la ligne PP′.

Mais maintenant puisque GP = DP, les deux triangles APG et APD sont équivalens, les deux triangles GOP et POD le sont aussi; par conséquent le triangle AOG sera équivalent au triangle AOD; d'où l'on peut conclure que les longueurs AD et AG, ou AF et AE sont réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du point O sur ces lignes.

Il est possible de tirer de ces différens énoncés quelques conséquences utiles et intéressantes.

ADDITION.

L'équation d'une tangente en un point x' et y' d'une hyperbole, rapportée aux asymptotes, est

$$y-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x')$$

et on a en même temps $x'y'=M^2$. De sorte qu'en désignant par x' et y' les coordonnées de C et par x'' et y'' celles de B (*fig.* 83), on trouve

$$\left.\begin{array}{l} yx'=-y'x+2y'x' \\ yx''=-y''x+2y''x'' \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (1)$$

Pour $y=o$, on a $x=2x'=AG$
$x=o$ $\quad y=2y'=AF$
$y=o$ $\quad x=2x''=AE$
$x=o$ $\quad y=2y''=AD$

d'où

$AG : AD = AE : AF$ à cause de $x'y'=x''y''$.

La droite passant par x' et y', x'' et y'', a pour équation

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$$

écrivant pour y' et y'' leurs valeurs $\frac{M^2}{x'}$ et $\frac{M^2}{x''}$, on obtient

$$y=\frac{M^2}{x'}+\frac{M^2}{x''}-\frac{M^2}{x'x''}x \Big\}\ldots\ldots\ldots (2)$$

Pour $y=0$, on a......... $AI = x'+x''$

$x=0$............. $AH=y'+y''$

d'où l'on conclut d'abord

$$AI=\left(\frac{AG+AE}{2}\right),\ AH=\left(\frac{AF+AD}{2}\right)$$

et, en vertu de $x'y'=x''y''$,

$$AI : AH = AG : AD = AE : AF.$$

Les coordonnées du point O d'intersection des tangentes en B et C, se déduisent facilement des équations (1), et on trouve ainsi

$$x=\frac{2x'x''(y''-y')}{y''x'-y'x''},\ y=\frac{2y'y''(x''-x')}{y'x''-x'y''}.$$

Cela posé, il est facile de prouver que la droite passant par le centre A et le point x et y, ou O, passe aussi par les milieux des transversales HI et DG, ou BC et DG : à cet effet, on partira de l'équation de la droite menée par le centre A et l'intersection O, savoir :

$$y=-\frac{y'y''(x''-x')}{x'x''(y''-y')}x$$

laquelle combinée avec l'équation (2) qui représente IH, donne, en égalant les ordonnées y,

$$x=\frac{M^2(x''+x')(y''-y')}{M^2(y''-y')-y'y''(x''-x')}:$$

observant que $y''x''=y'x'$, on a

$$x=\frac{M^2(x''+x')(y''-y')}{(M^2+y'x')(y''-y')}=\frac{M^2(x''+x')}{M^2+y'x'}$$

remplaçant M^2 par $y'x'$, on trouve enfin

$$x=\frac{x'+x''}{2}=\frac{AI}{2}=AR=\frac{AG+AE}{4}.$$

La même droite passe par le milieu P de DG. On sait que la tangente au point T d'intersection de la courbe par le diamètre AP, est parallèle à BC. On pourrait, comme l'observe l'auteur de l'article, déduire de ce qui précède d'autres propriétés plus ou moins curieuses.

J. G. G.

Solution de la question 2.°, proposé vol. II de la Corresp. Math. et Phys., pag. 130; *par M.* MANDERLIER, *candidat en sciences à l'Université de Gand.*

Soit (*fig.* 84) AB$=a$ la droite donnée prise pour axe des abscisses; soit AY l'axe des ordonnées; soit CFG l'une des positions du cercle qu'on considère, dont le centre C a pour coordonnées x' et r qui en est le rayon au point de contact. Quelle que soit la position du cercle, l'angle RAB sera toujours double de l'angle CAB. L'équation de AC est

$$y=\frac{r}{x'}x$$

ainsi celle de AR sera

$$y=\frac{2rx'}{x'^2-r^2}x, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La droite BC passant par les points $x=a$ et $y=0$, $x=x'$ et $y=r$, a pour équation

$$y=\frac{r}{x'-a}(x-a)$$

et par conséquent celle de BR sera

$$y=\frac{2r\,(x'-a)}{(x'-a)^2-r^2}(x-a) \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

L'élimination de x' entre (1) et (2) donnera une relation entre les coordonnées de R, pour toutes les positions du centre C, et conséquemment pour toutes celles du cercle. On tire de (1)

$$x'=\frac{rx}{y}\pm\frac{r}{y}\sqrt{x^2+y^2} \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

et de (2)

$$a-x'=-\frac{r\,(x-a)}{y}\pm\frac{r}{y}\sqrt{(x-a)^2+y^2} \ldots \quad (4)$$

Ajoutant (3) et (4), on parvient à celle de la courbe,

$$a\,(y-r)=r\sqrt{x^2+y^2}+r\sqrt{(x-a)^2+y^2} \ldots \quad (5)$$

Les hypothèses $x=o$ et $x=a$, donnent

$$y=2r\left(\frac{a-r}{a-2r}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

coordonnées des points F et G dans lesquels une branche de la courbe coupe l'axe des y et sa parallèle menée par l'autre extrémité B. En général, la formule (4) ne change pas, lorsqu'on y fait $x=\frac{a}{2}\pm b$, ce qui montre que la courbe est symétrique par rapport à un axe passant par le milieu de AB. L'équation (5) résolue par rapport à x, donne

$$x=\frac{a}{2}\pm\frac{y-r}{2r}\sqrt{\left[\frac{a^2(y-2r)-4r^2y}{y-2r}\right]}\ldots\ (7)$$

formule qui montre en effet que $x=\frac{a}{2}$ est un diamètre de la courbe. Le point où la courbe est coupée par ce diamètre, est donné par

$$\frac{a^2(y-2r)-4r^2y}{y-2r}=o,\ \text{d'où}\ y=\text{DE}=\frac{2a^2r}{a^2-4r^2}.\ (8)$$

OBSERVATION.

La solution de M. *Manderlier*, plus simple que celle de M. *Groetaers* (tom. II, p. 202), laisse encore beaucoup à désirer sous le point de vue de la discussion de la courbe dont le dernier ne s'est pas occupé.

D'abord si l'on ne considère les positions du cercle mobile qu'entre les limites Aa et Bb (*fig.* 85), qui répondent à $x=o$ et $x=a$, on n'a que la portion aMb de l'une des branches de la courbe qui s'étend indéfiniment à droite de Bb et à gauche de Aa, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, en observant qu'à mesure que le point de contact du cercle avec la base AB, se rapproche du point B, les tangentes vont concourir en des points successivement plus éloignés de b et de l'axe, et qu'avant que ce point de contact arrive en B, il y a une position du cercle pour laquelle les tangentes par A et par B, sont parallèles entre-elles; d'où résulte un point de concours à l'infini. La même chose a lieu du côté de A. Si de l'équation (7) on tire la valeur du $\frac{dy}{dx}$, et qu'on

l'égale à zéro, on trouve $x = \frac{a}{2}$, et on reconnaît que cette abscisse répond à une ordonnée *minimum* qui est la valeur de y exprimée par la formule (8), en sorte que $OM = \frac{2a^2r}{a^2 - 4r^2}$. Si à partir du point de contact, à gauche de B, auquel répondent deux tangentes parallèles, on fait rouler le cercle vers X, lorsque le contact sera en B, le point de concours des tangentes sera en A, et à mesure que le contact s'éloignera de B vers X, les points de concours s'éloigneront de A et leurs positions successives donneront la branche ARS : il y aura lieu à une autre branche BRS′ donnée par les concours des tangentes aux cercles dont les points de contact sont sur AX′. En donnant à la formule (7) la forme

$$x - \frac{a}{2} = \pm \frac{y - r}{2r} \sqrt{\left[\frac{(a^2 - 4r^2)y - 2ra^2}{y - 2r}\right]}$$

on voit que pour $x = \frac{a}{2} = AO$, on a $y = r = OR$, ordonnée de l'intersection des branches AS et BS′. A $x = \infty$, répond $y = 2r$: ainsi les deux branches AS et BS′ admettent une asymptote commune qui a pour ordonnée $ON = 2r$. En faisant disparaître successivement les radicaux de l'équation (5), on tombe sur la suivante du troisième degré :

$$(a^2 - 4r^2)y^3 + 4r(2r^2 - a^2)y^2 - 4r^2(x^2 - ax - r^2 - a^2)y$$
$$+ 8r^3x(x - a) = 0$$

qui pour $x = a$ et $x = 0$, donne d'abord $y = 0$, c'est-à-dire, les points B et A, puis l'équation du second degré

$$(a^2 - 4r^2)y^2 + 4r(2r^2 - a^2)y + 4r^2(r^2 + a^2) = 0$$

dont la résolution fait connaître $y = Br = Ar'$; $y = Bb = Aa$. Le cercle générateur inférieur à l'axe des x, donne les branches A′M′b′, BR′ρ′s′ et AR′ρs. Les points M, R, R′ et M′ sont en ligne droite. A l'hypothèse $a = 2r$ répond $OM = \infty$.

J. G. G.

Si d'un point M *pris à volonté, sur une hyperbole, on mène à deux autres points donnés* M' *et* M'' *deux sécantes prolongées jusqu'à la rencontre de l'asymptote, la partie interceptée* Rr, *est constante, quelle que soit la position du point* M. *Par M.* A. LESCHEVAIN, *élève de l'Université de Gand.* (*)

Soient (*fig.* 86) x' et y' les coordonnées du point M'; x'' et y'' celles du point M''; x et y celles du point variable M : l'équation d'une droite par M, rapportée aux asymptotes, sera

$$y = \frac{\sin. \alpha}{\sin. (\beta - \alpha)} x + b, \text{ ou } y = \frac{x}{\sin. \beta \cot. \alpha - \cos. \beta} + b$$

$$= \frac{x}{u \cot. \alpha - v} + b$$

en posant $\sin. \alpha = u$, $\cos. \beta = v$: mais cette droite étant assujettie à passer par M', on aura aussi

$$y' = \frac{x'}{u \cot. \alpha - v} + b,$$

d'où

$$\cot. \alpha = \frac{v(y' - b) + x'}{u(y' - b)}$$

remplaçant dans la précédente, cot. α par cette valeur, on aura pour l'équation de MM'

$$y = \frac{y' - b}{x'} x + b.$$

(*) Cette propriété peut être considérée comme une généralisation de celle qu'a démontrée monsieur *Leschevain*, pag. 263 du même volume : d'ailleurs elle sert de lemme à la solution qui suit.

J. G. G.

On trouverait

$$y=\frac{y''-b'}{x''}x+b'$$

pour celle de MM″; mais on a aussi

$$x'=\frac{M^2}{y'},\ x''=\frac{M^2}{y''}$$

en sorte que les deux précédentes se changeront dans celles-ci

$$(1)\ldots y=\frac{y'x(y'-b)}{M^2}+b\,;\ y=\frac{y''x(y''-b')}{M^2}+b'\ldots(2)$$

comme $b=Ar$ et $b'=AR$, la question revient à évaluer $b-b'$: à cet effet, des équations (1) et (2) on tire

$$b=\frac{y'^2x-M^2y}{y'x-M^2},\ b'=\frac{y''^2x-M^2y}{y''x-M^2}$$

d'où

$$b-b'=\frac{y'^2x-M^2y}{y'x-M^2}-\frac{y''^2x-M^2y}{y''x-M^2}$$

écrivant pour x sa valeur $\frac{M^2}{y}$, on tombera sur cette expression

$$b'-b=\frac{\frac{y'y''(y''-y')}{y'^2}-\left(\frac{y''^2-y'^2}{y}\right)+(y''-y')}{\frac{y''y'}{y^2}-\left(\frac{y''+y'}{y}\right)+1}.$$

Il est aisé de reconnaître qu'en multipliant le dénominateur par $y''-y'$, on retrouve le numérateur; d'où on conclut

$$b'-b=Rr=y''-y'$$

valeur qui ne dépend que des coordonnées des deux points fixes M″ et M′: cette différence est donc constante pour toutes les positions du point M.

ADDITION.

Si l'on suppose que le point variable M (*fig.* 87) vienne coincider avec M″, la corde MM″ deviendra la tangente M″ m″ en M″, et

M'M deviendra la secante M'M'' qui rencontre l'asymptote en ρ, et on aura, en vertu du théorème, $m''\rho = Rr$. Pareillement si le point variable M va coincider avec M', la sécante MM' se changera dans la tangente M'm', et on aura $\rho m' = Rr = \rho m''$.

Donc le segment intercepté sur l'asymptote entre les sécantes menées d'un point variable M, à deux points fixes M' et M'', est constant et égal au segment intercepté sur la même asymptote, entre la corde qui joint les deux points fixes et la tangente menée par l'un ou l'autre des ces points. Ce théorème général a été demontré par M. *Briançhon*, dans un mémoire déjà cité sur les lignes du second ordre, et faisant suite aux recherches du même géomètre, insérées dans les journaux de l'École Polytechnique : mais comme il dépend d'un grand nombre de théorèmes antécédens, nous avons cru devoir en donner une démonstration directe, d'autant plus que la solution suivante repose sur ces propriétés de l'hyperbole.

J. G. G.

Solution de la question 2.°, Corresp. tom. II, pag. 192. *Décrire une hyperbole dont on a une asymptote, un point et les directions de deux tangentes.*

Soient (*fig.* 88) RY l'asymptote donnée, Tm'' et tm' les tangentes données qui rencontrent l'asymptote en m'' et m'; soit M le point donné sur la courbe : par M je mène la parallèle MN à l'asymptote, laquelle est rencontrée en N et G par les directions des tangentes données ; je prends sur cette parallèle la longueur MK moyenne proportionnelle entre MN et MG et je joins K avec le point ρ milieu de $m'm''$: la droite Kρ coupera les tangentes données Tm'' et tm' dans les points M'' et M' où elles doivent toucher l'hyperbole. On a d'abord, en vertu de la construction,

$$(1) \ldots\ldots\ldots \rho m'' = \rho m', \ \overline{MK}^2 = MG \times MN \ldots\ldots (2)$$

Or les triangles semblables $m'M'r$ et $MM'G$, $\rho M'r$ et $MM'K$ donnent les proportions

$$m'r : MG = rM' : M'M;\ \rho r : MK = rM' : M'M$$

d'où

$$m'r : \rho r = MG : MK = MG \times MK : \overline{MK}^2 = MK : MN. \quad (3)$$

après avoir remplacé $\overline{MK}^2$ par sa valeur (2). Mais les triangles semblables $\rho M''R$ et $MM''K$, $MM''N$ et $m''M''R$ donnent les proportions

$$\rho R : MK = RM'' : M''M;\ RM'' : M''M = m''R : MN$$

d'où résulte

$$MK : MN = \rho R : m''R \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Les proportions (3) et (4) fournissent celle-ci

$$\rho R : m''R = m'r : \rho r, \text{ ou } m''R : \rho R = \rho r : m'r$$

d'où

$$m''R - \rho R : \rho R = \rho r - m'r : m'r, \text{ ou } m''\rho : \rho R = \rho m' : m'r$$

d'où l'on tire, en vertu de (1),

$$\rho R = m'r;$$

ajoutant de part et d'autre Rm', il vient

$$\rho m' = rR; \text{ donc } \rho m'' = \rho m' = rR.$$

Ainsi les points M, M' et M'' sont sur une hyperbole. Prenons sur l'asymptote les longueurs égales

$$rm = m'r = R\rho$$

si de l'égalité $Rr = \rho m'$ trouvée ci-dessus, on retranche membre à membre Rm', il restera $m'r = \rho R = mr$. On conclura de la propriété précédemment démontrée que mM touche la courbe en M. Ayant ainsi trois points et une asymptote, on peut décrire la courbe.

Par ces trois points, on pourrait décrire une hyperbole dont les asymptotes soient parallèles à deux droites données.

En partant de l'équation la plus générale des lignes du second ordre, savoir :

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + f = 0 \ldots\ldots (1)$$

rapportée aux deux tangentes données comme axe des coordonnées

obliques, et à leur intersection comme origine, il s'agirait de déterminer les cinq coefficiens a, b, c, d et f de manière à satisfaire aux cinq conditions données : on assujettirait d'abord les deux droites ou axes, à toucher la courbe, ce qui donnerait deux équations; puis l'asymptote à toucher la courbe, et de plus, à la toucher à l'infini, d'où résulteraient deux autres équations, et enfin on dirait que le point donné est sur la courbe, ou que ses coordonnées x' et y' satisfont à l'équation (1). Au moyen de ces cinq relations entre a, b, c, d et f, on pourrait déterminer ces coefficiens et reporter enfin ces déterminations dans (1).

J. G. G.

Solution de la question 3.°, Corresp. *tom. II, pag.* 308. *Deux plans sont assujettis à passer chacun par une droite fixe (ces deux droites ne sont pas dans un même plan); on fait mouvoir ces plans autour de ces droites, de manière qu'ils restent constamment perpendiculaires entre eux : on demande le lieu des intersections successives de ces plans, c'est-à-dire, l'équation et la discussion de la surface qui en résulte.*

Soient (*fig.* 89) L et L′ ces deux droites, et MM′ leur plus courte distance : concevons un plan par L′ et M′M, lequel coupera la droite L en M; la portion ML de la droite L, sera, par exemple au-dessous de ce plan. Prenons le point A, milieu de MM′, pour origine des coordonnées, et l'axe des z, suivant la plus courte distance. Par A menons les parallèles Al' et Al aux droites M′L′ et ML; ces droites seront deux perpendiculaires au point A de M′M; prenons pour axe des x la droite AX qui divise également l'angle l'Al; cet axe sera perpendiculaire au point A de l'axe des z; prenons enfin pour axe des y, la droite YY, perpendiculaire aux axes XX et ZZ.

Cela posé, désignons par m la tangente du demi-angle entre les droites L et L′, ou entre leurs parallèles l et l', et par n les demi-

longueurs AM = AM'. Les équations des droites fixes, seront

pour L'... $\left\{\begin{matrix} y = mx \\ z = n \end{matrix}\right\}$; pour L $\left\{\begin{matrix} y = -mx \\ z = -n \end{matrix}\right\}$........ (1) (*)

et les deux plans rapportés aux mêmes axes, seront représentés par

(2)... $Ax + By + Cz + D = 0$; $A'x + B'y + C'z + D' = 0$. (3).

Il faut maintenant 1.° assujettir ces plans à passer par les droites données; 2.° exprimer qu'ils se rencontrent à angles droits, ce qui donnera la relation cherchée. Pour que le plan (2) renferme la droite L', il faut que son équation soit satisfaite par les coordonnées de cette droite, c'est-à-dire, qu'on ait

$$(A + Bm)\,x + Cn + D = 0,$$

et de plus que cette équation ait lieu, quelle que soit la coordonnée x; on aura donc les conditions

(4)..... $A + Bm = 0$, $Cn + D = 0$.............. (5)

Le plan (3) contiendra L, sous les relations

(6) ..... $A' + B'm = 0$, $C'n + D' = 0$............ (7)

D'ailleurs on a pour condition connue de perpendicularité des plans (2) et (3),

$$AA' + BB' + CC' = 0 \text{............ (8)}$$

qu'il s'agit de traduire en x, y, z, n et m. A cet effet, des quatre équations (4), (5), (6) et (7), on tirera facilement

$$AA' = -\frac{DD'(n^2 - z^2)\,m^2}{n^2(y^2 - m^2x^2)};\ BB' = \frac{DD'(n^2 - z^2)m^2}{n^2(y^2 - m^2x^2)},\ CC' = -\frac{DD'}{n^2}$$

Donc (8) devient

$$(z^2 - n^2)(m^2 - 1) = y^2 - m^2x^2 \text{........ (9)}$$

L'équation (9) revient à celle-ci

$$m^2x^2 + (m^2 - 1)\,z^2 - y^2 = n^2\,(m^2 - 1)$$

et, sous l'hypothèse $m^2 < 1$, elle prend la forme

$$y^2 + (1 - m^2)\,z^2 - m^2x^2 = n^2\,(1 - m^2) \text{.... (9')}$$

(*) On observera que les projections des droites L' et L sur les plans des yx, sont les droites l' et l.

comparable avec la suivante

$$b^2c^2y^2+a^2c^2z^2-a^2b^2x^2=a^2b^2c^2\ldots\ldots\ (10)$$

qui représente l'hyperboloïde à une nappe, et dont les trois sections principales, celles qui sont faites par les plans coordonnés, ou qui répondent aux hypothèses $x=0$, $y=0$ et $z=0$, ont pour équations

$$y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2);\ x^2=\frac{c^2}{b^2}(z^2-b^2);\ x^2=\frac{c^2}{a^2}(y^2-c^2).\ (11)$$

dont la première représente une ellipse et les deux autres sont des hyperboles. Pour trouver les demi-axes a, b et c, en fonction des coefficiens de l'équation (9′), on partira des rélations

$$b^2c^2=1,\ a^2c^2=1-m^2,\ a^2b^2=m^2;\ a^2b^2c^2=n^2(1-m^2)$$

dont on divisera la dernière par chacune des précédentes : de cette manière, on trouvera

$$a^2=n^2(1-m^2);\ b^2=n^2;\ c^2=\frac{n^2}{m^2}(1-m^2).\ (12)$$

qu'il faudra reporter dans les équations (11). Les hypothèses $y=0$ et $z=0$ donnent $x=\pm\frac{n}{m}\sqrt{-(1-m^2)}$, ce qui apprend que l'axe des x se trouve dans l'espace vide de l'hyperboloïde. Aux hypothèses $x=0$ et $y=0$, $x=0$ et $z=0$, répondent $z=\pm n$, et $y=\pm n\sqrt{1-m^2}$; ainsi les axes des z et des y, c'est-à-dire, b et a sont réels; c'est-à-dire que la surface n'a que quatre sommets réels qu'on peut déterminer, et qui se trouvent aux extrémités des coordonnées $\pm n$, $\pm n\sqrt{1-m^2}$. On peut rechercher les intersections de la surface avec la droite par l'origine, qui a pour équations

$$y=\alpha x,\ z=\beta x\ldots\ldots\ldots\ldots\ (12)$$

On trouve ainsi

$$x=\frac{n\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{\alpha^2+(1-m^2)\beta^2-m^2}},\ y=\frac{\alpha n\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{}}$$

$$z=\frac{\beta n\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{}}$$

Du radical égalé à zéro, on tire

$$c = \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{\sqrt{1 - m^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

valeur qui ne sera réelle que pour $a < m$. Si l'on veut avoir les coupes de la surface par trois plans respectivement perpendiculaires aux plans coordonnés, on fera successivement $x = p$, $y = q$, $z = r$.

Sous la relation $m > 1$, l'équation (9), c'est-à-dire,

$$m^2x^2 + (m^2 - 1)\,z^2 - y^2 = n^2\,(m^2 - 1)$$

sera encore à un hyperboloïde à une nappe : mais ici ce sera l'axe des y qui se trouvera dans l'espace vide.

Pour $m = 0$, les équations (12) donnent $a = b$ et c ou l'axe des x infini, et la première des équations (11) devient $y^2 = a^2 - z^2$, qui est à un cercle : ainsi, dans ce cas, la surface est un cylindre autour de l'axe des x. Pour $n = 0$, on a $a = b = c = 0$, et l'équation (9) se transforme dans celle-ci

$$m^2x^2 + (m^2 - 1)\,z^2 - y^2 = 0.$$

J. G. G.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Solution de la question 2.°, Corresp. *tom. II, pag.* 256, *par M.* Timmermans, *Professeur de mathématiques spéciales à l'Athénée de Tournay.*

Si l'on assujettit une courbe du second degré à passer par quatre points donnés, et si d'un point quelconque on mène une tangente à cette courbe et à toutes celles qui passeront par ces quatre points, tous les points de contact se trouveront en ligne droite.

L'équation la plus générale des courbes du second degré, étant

$$x^2 + ay^2 + bxy + cx + gy + e = 0$$

si l'on assujettit cette courbe à passer par quatre points $x'y'$, $x''y''$, etc., on obtiendra quatre équations de condition entre les quantités connues $x'y'$, $x''y''$, etc. et les coefficients a, b, c, g, e; de sorte qu'on pourra en tirer les valeurs de quatre des cinq coefficiens en fonction du cinquième, e par exemple, qui entrera évidemment dans leur valeur d'une manière linéaire; substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle ne contiendra plus que le seul coefficient e, et il suffira de le faire varier pour obtenir toutes les courbes possibles. L'équation d'une tangente à la courbe, menée par le point dont les coordonnées sont m et n, xy étant le point de contact et XY les variables, est

$$Y-n=\frac{dy}{dx}(X-m)$$

substituant la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation de la courbe, on aura

$$Y-n=-\frac{2x+by+c}{2ay+bx+g}(X-m)$$

et comme XY appartiennent à tous les points de la tangente et par conséquent au point de contact, on aura aussi

$$y-n=-\frac{2x+by+c}{2ay+bx+g}(x-m).$$

Pour étendre cette relation à toutes les courbes, il faudra faire varier le coefficient e qui entre dans a, b, c, g, et par conséquent différentier ces dernières quantités par rapport à e; on aura donc

$$(y-n)\left(2y\frac{da}{de}+x\frac{db}{de}+\frac{dg}{de}\right)=-(x-m)\left(y\frac{db}{de}+\frac{dc}{de}\right)\ldots(a)$$

mais nous avons vu que a, b, c, g contiennent e d'une manière linéaire; les coefficiens différentiels $\frac{da}{de}$, $\frac{db}{de}$ etc. ne doivent donc plus contenir e et sont par conséquent constans; l'équation précédente appartient donc à une ligne droite (*).

(*) L'équation (a) reste du second degré, si l'on n'a pas $\frac{da}{de}=0$ et $\frac{db}{de}=0$, ou si elle n'est pas reductible ou décomposable.

LES ÉDITEURS.

CALCUL INTÉGRAL.

Note sur l'intégration des équations linéaires, par M. VAN REES, *Professeur de mathématiques et Recteur de l'Université de Liège.*

On sait que pour trouver l'intégrale complette de l'équation linéaire

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+Ty=0\ldots\ (1)$$

dans laquelle P, Q... T sont fonctions de x seule, il suffit de connaître n intégrales particulières $y=p$, $y=q$, $y=r$, etc. de cette équation. Multipliant alors chacune d'elles par une constante arbitraire, la somme des produits $y=Cp+C'q+C''r+$ etc. sera l'intégrale complette.

Lorsque l'équation contient un dernier terme V, fonction de x seule, en sorte qu'on ait à intégrer

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+Ty=V.\ (2)$$

on se sert encore de l'intégrale complette de l'équation (1), mais en y faisant varier les constantes arbitraires C, C', C'', etc. sous la condition que la forme des coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ déduits de cette intégrale, restera la même. Cette condition donne $n-1$ équations du premier degré entre les n coefficiens $\frac{dC}{dx}$, $\frac{dC'}{dx}$, $\frac{dC''}{dx}$ etc.; la substitution des valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. dans l'équation (2) donne une n^e équation de la même forme. Résolvant ces équations par rapport à $\frac{dC}{dx}$, $\frac{dC'}{dx}$ etc. ces coefficiens se trouveront exprimés en

fonction de x seule, et il sera par conséquent facile d'en déduire les valeurs de C, C', etc.

Cette méthode, due à *Lagrange*, est générale (*) : mais cependant son application conduit, dans la plupart des cas, à des calculs compliqués, qu'on pourra souvent éviter en employant le théorème suivant.

Désignons par $y=X$ l'intégrale *complète* de l'équation (1); soit aussi $y=X'$ une intégrale *particulière* de l'équation (2). L'intégrale *complète* de cette même équation (2), sera $y=X+X'$.

La démonstration de ce théorème est facile; car d'abord l'expression $y=X+X'$ contient déjà dans son terme X, les n constantes arbitraires requises; il suffira donc de prouver qu'elle satisfait à l'équation (2). Or si on y substitue cette valeur de y, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^nX}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}X}{dx^{n-2}}\ldots+TX\\+\frac{d^nX'}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}X'}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}X'}{dx^{n-2}}\ldots+TX'\end{array}\right\}=V\ldots\ldots(3)$$

Mais $y=x$ est l'intégrale complète de (1); $y=X'$ est une intégrale particulière de (2) : on a donc

$$\frac{d^nX}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}X}{dx^{n-2}}\ldots+TX=0$$

$$\frac{d^nX'}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}X'}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}X'}{dx^{n-2}}\ldots+TX'=V$$

et puisque ces équations vérifient l'équation (3), il est évident que $y=X+X'$ satisfait à l'équation (2), et en est par conséquent l'intégrale complète.

Si donc on suppose l'équation (1) complètement intégrée, toute la difficulté se réduira à trouver une intégrale particulière de (2). Or, on prévoit d'avance, dans un grand nombre de cas, la forme que doit avoir cette intégrale, ensorte qu'on n'aura qu'à déterminer les coefficiens constans qu'elle peut contenir. En effet, on n'aura

(*) Il existe différentes méthodes pour réduire l'intégration de l'équation (2) à celle de l'équation (1), ou pour l'intégrer directement (voyez par exemple le *Calcul intégral* de M. le Professeur *Garnier*, pag. 257 et 269); elles exigent cependant toutes un calcul prolixe.

qu'à prendre pour X' une fonction de x telle que substituée au lieu de y dans le premier membre de (2), il en résulte des termes semblables à ceux dont se compose le second membre V : les équations obtenues en égalant les coefficiens des termes semblables dans les deux membres, serviront à trouver les coefficiens indéterminés dans X'.

J'ajouterai quelques exemples, en me bornant aux équations du second ordre, et supposant les coefficiens P, Q du premier membre, constans.

1.er Exemple. Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=a+bx+cx \dots\dots\dots (4)$$

On fera $y=A+Bx+Cx^2$, A, B et C étant des coefficiens indéterminés; substituant et égalant les coefficiens des puissances semblables, on trouve

$$2C+PB+QA=a$$
$$2PC+QB=b$$
$$QC=c$$

dont on déduit

$$A=\frac{aQ^2-bPQ+2c(P^2-Q)}{Q^3},\ B=\frac{bQ-2cP}{Q^2},\ C=\frac{c}{Q}.$$

Donc

$$y=\frac{aQ^2-bPQ+2c(P^2-Q)+(bQ-2cP)Qx+cQ^2x^2}{Q^3}$$

sera intégrale particulière de (4).

2.e Exemple. Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P.\frac{dy}{dx}+Qy=a\sin.mx.$$

Si on fait $y=A\sin.mx+B\cos.mx$, on aura après la substitution

$$(-Am^2-BPm+AQ)\sin.mx+(-Bm^2+APm+QB)\cos.mx=a\sin.mx$$

dont on tire les équations

$$-Am^2-BPm+AQ=a$$
$$-Bm^2+APm+BQ=0$$

Leur résolution donne

$$A=\frac{a(Q-m^2)}{(Q-m^2)^2+P^2m^2},\ B=-\frac{aPm}{(Q-m^2)^2+P^2m^2},$$

et l'intégrale particulière sera

$$y=a\,\frac{(Q-m^2)\sin. mx-Pm\cos. mx}{(Q-m^2)^2+P^2m^2}.$$

3.° Exemple. Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2}+Qy=e^{mx}\sin. nx.$$

Je fais

$$y=e^{mx}(A\sin. nx+B\cos. nx)$$

ce qui donne

$$\frac{dy}{dx}=e^{mx}\left[(mA-nB)\sin. nx+(mB+nA)\cos. nx\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{mx}\left[((m^2-n^2)A-2mnB)\sin. nx+((m^2-n^2)B+2mnA)\cos. nx\right]$$

substituant dans l'équation proposée les valeurs de y et $\frac{d^2y}{dx^2}$, puis divisant par e^{mx}, on a

$$[(m^2-n^2+Q)A-2mnB]\sin. nx+[(m^2-n^2+Q)B+2mnA]\cos. nx=\sin. nx$$

donc

$$(m^2-n^2+Q)\ A-2mnB=1$$
$$(m^2-n^2+Q)\ B+2mnA=0.$$

Résolvant, on trouve

$$A=\frac{m^2-n^2+Q}{(m^2-n^2+Q)^2+4m^2n^2};\ B=-\frac{2mn}{(m^2-n^2+Q)^2+4m^2n^2}.$$

On voit par ces exemples, que la recherche de l'intégrale particulière de (2), se fait sans peine dans tous les cas où le dernier membre V n'est composé que de termes entiers rationnels, ou des fonctions circulaires et exponentielles $\sin. mx$, $\cos. mx$, e^{mx}, ou enfin des produits de ces

quantités. Si au contraire V contient des termes fractionnaires ou logarithmiques, notre méthode ne réussira pas en général; mais aussi, dans ces mêmes cas, celle de *Lagrange* ou toute autre exigera l'intégration de formules différentielles, telles que $\frac{e^{mx}}{x}$, e^{mx} log. x, qui ne peuvent être intégrées sous forme finie.

MÉCANIQUE.

Extrait d'une lettre de M. Gerono, *Professeur des Pages du Roi de France, à M.* Quetelet.

1.re Note. Un système de forces (*fig.* 90) $A_1B_1 \ldots A_n B_n$, de directions quelconques, mais situées sur un plan, se réduit à un seul système de forces parallèles. En effet, d'un point quelconque menons $OD_1, \ldots OD_n$, égales et parallèles à $A_1B_1, \ldots A_n B_n$; soient F le centre des moyennes distances des points $D_1, \ldots D_n$, et XY un axe qui rencontre les directions des forces A_1B_1, etc. On peut concevoir que chacune de ces forces, soit décomposée en deux autres dont la première soit parallèle à OF et la seconde située dans l'axe XY. Or, les forces situées dans l'axe XY, sont en équilibre; car leur somme est nulle, puisqu'elle est égale à la somme des parallèles à XY, menées des points $D_1, \ldots D_n$ jusqu'à la rencontre de la droite OF qui passe par leur centre de moyennes distances. On a donc, au lieu des forces données, le système des forces parallèles à OF.

On peut encore remarquer que la direction de OF coïncide avec la direction de la résultante des forces représentées en grandeurs et en directions par $OD_1, \ldots OD_n$.

2.e Note. Un système de forces quelconques dirigées dans l'espace,

peut être remplacé par deux systèmes de forces parallèles; car chacune des forces données se décompose en deux forces dont l'une est située dans un plan déterminé, et l'autre perpendiculaire à ce plan. Or, les forces situées dans le plan, peuvent se réduire à un seul système de forces parallèles. Donc etc.

3.° Note. Des droites PA, PB, PC, etc. au nombre de n, étant menées par un point sur un plan, on peut déterminer deux droites telles que si d'un point quelconque, on abaisse des perpendiculaires sur ces $n+2$ lignes, la somme des quarrés des perpendiculaires abaissées sur les n lignes données, soit à la somme des quarrés des perpendiculaires abaissées sur les deux lignes trouvées, comme n est à 2.

En effet, soient A′, B′, C′ etc. les points auxquels une circonférence passant par P et décrite avec un rayon quelconque, rencontre les lignes PA, PB, PC, etc.; F le centre des moyennes distances de A′, B′, C′ etc.; MFN une corde menée par F perpendiculairement à la droite FO qui joint le point F au centre de la circonférence : les deux droites PX, PY conduites par le point P et les extrémités de la corde MN, auront la propriété énoncée. Car, les perpendiculaires menées aux lignes PX, PY, PA, PB, etc., d'un point R pris dans leur plan, étant proportionnelles aux sinus des angles formés par ces lignes avec la direction PR, et ces sinus étant eux-mêmes proportionnels aux cordes ZM, ZN, ZA′, ZB′ etc.; tout se réduit à démontrer que

$$\overline{ZA'}^2+\overline{ZB'}^2+\overline{ZC'}^2\text{etc.} : \overline{ZM}^2+\overline{ZN}^2=n:2.$$

Cela posé, puisque le point F est le centre des moyennes distances de A′, B′, C′, etc., on a (*Géom. de position, théor.* 26) :

$$\overline{ZA'}^2+\overline{ZB'}^2+\text{etc.}=n.\overline{ZF}^2+\overline{FA'}^2+\overline{FB'}^2+\text{etc.} \quad (1)$$

et de même

$$\overline{OA'}^2+\overline{OB'}^2+\text{etc.}=n.\overline{OF}^2+\overline{FA'}^2+\overline{FB'}^2+\text{etc.} \quad (2)$$

mais, parce que

$$OM=OA'=OB'=OC'....$$

l'équation (2) se réduit à

$$n\times\overline{OM}^2=n.\overline{OF}^2+\overline{FA'}^2+\overline{FB'}^2+\text{etc.}$$

transposant, cette dernière équation devient

$$n.(\overline{OM}^2 - \overline{OF}^2) = \overline{FA'}^2 + \overline{FB'}^2 + \text{etc.}$$

ou

$$n.\overline{FM}^2 = \overline{FA'}^2 + \overline{FB'}^2 + \text{etc.}$$

remplaçant dans l'équation (1) $\overline{FA'}^2 + \overline{BF'}^2 +$ etc. par $n.\overline{FM}^2$, on obtient

$$\overline{ZA'}^2 + \overline{ZB'}^2 + \overline{ZC'}^2 + \text{etc.} = n.\overline{ZF}^2 + n.\overline{FM}^2 = n(\overline{ZF}^2 + \overline{FM}^2)$$

$$= n\left(\frac{\overline{ZM}^2 + \overline{ZN}^2}{2}\right)$$

et par conséquent :

$$\overline{ZA'}^2 + \overline{ZB'}^2 + \overline{ZC'}^2 + \text{etc.} : \overline{ZM}^2 + \overline{ZN}^2 = n : 2.$$

Il existe une proposition plus générale qui peut s'énoncer ainsi : soit n le nombre de plusieurs droites concourantes en un point et situées sur un plan ; m un nombre entier moindre que $n - 1$: on peut déterminer $m + 1$ lignes droites de positions telles, qu'abaissant d'un point quelconque du même plan des perpendiculaires à toutes ces lignes, la somme des deuxièmes puissances des perpendiculaires abaissées sur les lignes données, soit à la somme des deuxièmes puissances des perpendiculaires abaissées sur les lignes trouvées, comme n est à $m + 1$.

Solution par M. PAGANI, *Professeur extraordinaire à l'Université de Louvain, de la question proposée* (Correspondance, tom. 1, pag. 358, 4.°) *et ayant pour énoncé : le vase cylindrique* AD (fig. 91) *contient une certaine quantité d'eau dont la densité est prise pour unité, et le cylindre* EG *plongé dans le liquide dont le niveau est marqué par la droite* MN. *Un contre-poids fait équilibre au cylindre* EG *dans la position actuelle; mais, si par l'effet d'une cause quelconque, le cylindre* EG *s'enfonce ou se relève d'une quantité quelconque* Gg = Gg′, *il perdra visiblement ou gagnera du poids. On demande un moyen mécanique propre à transmettre l'action du contre-poids invariable, de manière à faire toujours équilibre au cylindre plongeur.* (*)

Nous commencerons par la détermination du poids du cylindre dans les trois positions que nous avons à considérer, et nous nommerons, pour abréger (*fig.* 91)

R le rayon de la base du vase AD;
r le rayon de la base du cylindre EG,
h sa hauteur EG;

(*) Ce problème a été annoncé, en d'autres termes, dans le premier volume de la Correspondance : mais il est bon d'observer que le frottement ne doit pas être pris en considération dans le cas actuel, puisque le cylindre plongeur doit, tour-à-tour, vaincre la résistance et être vaincu par elle-même. On conçoit même que moins il y aura de frottement, et plus la cause qui doit pousser le cylindre vers le haut, ou le déterminer à descendre, deviendra légère, et s'il était possible de rendre celle-ci infiniment petite, l'on aurait une solution mathématiquement exacte du problème. Mais cette condition est impossible à réaliser; et voilà la raison pour laquelle j'ai fait réagir le contre-poids à l'aide d'un levier, seul moyen d'avoir le plus petit frottement possible.

ρ sa pesanteur spécifique, celle de l'eau étant $=1$;
k la distance FG de la base inférieure du cylindre au fond du vase,
Δ la variation arbitraire $Gg = Gg'$ de la distance k;
l la longueur GL de la partie plongée du cylindre;

$$\left.\begin{matrix} P \\ p \\ p' \end{matrix}\right\} \text{les poids du cylindre dans les positions} \left\{\begin{matrix} EG \\ eg \\ e'g' \end{matrix}\right. ; \text{ enfin}$$

δ la variation $Ll = Ll'$ du niveau de l'eau, correspondante à la variation Δk.

Les quatre dernières quantités sont des inconnues que nous allons déterminer successivement.

1.° *Détermination de* P.

Le volume du cylindre EG étant $\pi r^2 h$; son poids dans l'air sera $\rho\pi r^2 h$. En outre le volume de la partie plongée, dont la hauteur est $GL = l$, étant $\pi r^2 l$, et la pesanteur spécifique de l'eau étant égale à l'unité, la perte de poids du cylindre plongé, sera $\pi r^2 l$. Partant

$$P = \pi r^2 (\rho h - l),$$

ou bien

$$P = \pi r^2 i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

en faisant, pour abréger,

$$i = \rho h - l \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

2° *Détermination de* δ.

En supposant que le cylindre EG soit enfoncé dans l'eau jusqu'en g, et que le niveau MN s'élève en mn, il est clair que le volume de l'anneau Mn qui entoure la partie supérieure du cylindre, doit être équivalent au volume de la partie Gg dont le cylindre est descendu. Or l'expression du premier de ces volumes, étant $\pi (R^2 - r^2)\,\delta$, et celle du second étant $\pi r^2 \Delta$, on aura $\pi (R^2 - r^2)\,\delta = \pi r^2 \Delta$; d'où

$$\delta = \frac{r^2}{R^2 - r^2}\Delta;$$

On serait arrivé à la même détermination de δ, si on eût supposé que le cylindre EG, au lieu de descendre, se fut élevé à la position $e'g'$, en posant $Gg' = \Delta$.

3.° *Détermination de* p.

Lorsque le cylindre occupe la situation eg, la longueur de la partie plongée, étant $gl = GL + Gg + Ll = l + \Delta + \delta$, il viendra, en substituant et en réduisant, $gl = l + \frac{R^2}{R^2 - r^2}\Delta$; par conséquent la perte de poids du cylindre dans cette position, sera $\pi r^2 (l + \frac{R}{R^2 - r^2}\Delta)$. On aura donc

$$p = \pi r^2 (ph - l - \frac{R^2}{R^2 - r^2}\Delta),$$

ou bien, en vertu de l'équation (2),

$$p = \pi r^2 (i - \frac{R^2}{R^2 - r^2}\Delta) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

4.° *Détermination de* p'.

Supposons que le cylindre s'élève en $e'g'$, Gg' étant $= \Delta$; on aura $g'l' = l - \Delta - \delta$; d'où il est aisé d'en conclure, comme ci-dessus,

$$p' = \pi r^2 (i + \frac{R^2}{R^2 - r^2}\Delta) \ldots\ldots\ldots (4)$$

Faisons, pour plus de simplicité,

$$\Pi = \frac{\pi R^2 r^2}{R^2 - r^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

et substituons cette valeur, ainsi que celle de P donnée par la formule (1), dans les formules (3) et (4), et nous obtiendrons les suivantes

$$p = P - \Pi\Delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$
$$p' = P + \Pi\Delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

qui sont très-simples et qui nous serviront à la détermination des poids p et p', en fonction de P et de Δ.

Il s'agit maintenant de trouver un moyen à l'aide duquel, et avec un contre-poids constant Q, on puisse faire équilibre au poids variable du cylindre plongeur. Pour y parvenir, imaginons un levier horizontal MCN (*fig.* 92), parfaitement en équilibre dans toutes ses

positions autour du point d'appui C. Suspendons le poids P tangentiellement à l'extrémité M du levier que nous supposons être terminé par un arc de cercle AMB dont le centre est en C, et dont le rayon CM $= a$. Suspendons à l'autre extrémité du levier terminé par la courbe DNE, le contre-poids Q agissant tangentiellement à la courbe, au point L, avec un bras de levier CR = B. Nous aurons d'abord $a.P = B.Q$; et cette équation nous fera connaître la valeur du contre-poids, lorsque les autres quantités seront déterminées. Mais nous pouvons supposer que le levier MCN est construit de manière à avoir CM = CR; ce qui nous fournit $B = a$, et $Q = P$.

Cela posé, supposons que le poids P descende d'une quantité Δ, et que la droite MCN prenne la position $m'Cn'$, tandis que la droite mCn prendra la position horizontale. Supposons, en outre, que dans cette nouvelle position, le poids P se change en p, agissant au point m avec le bras de levier $Cm = a$; alors le contre-poids agira tangentiellement au point l avec le bras de levier $Cr = b$. Nous aurons donc $b.Q = a.p$, ou bien $b.P = a.p$; d'où nous déduirons, en vertu de la formule (6),

$$b = \frac{a}{P}(P - \Pi\Delta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

Si nous supposons, au contraire, que le poids P monte verticalement d'une quantité Δ, et qu'il se change en p' agissant tangentiellement au point m'; le contre-poids agira tangentiellement en l' avec le bras de levier $Cr' = b'$, et nous aurons $b'.P = a.p'$.

En substituant à p' sa valeur donnée par la formule (7), on trouvera

$$b' = \frac{a}{P}(P + \Pi\Delta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

Les formules (8) et (9) nous font voir que la courbe DNE doit être telle que l'on ait toujours

$$Cr = CR\left(1 - \frac{\Pi}{P}\Delta\right)$$

et

$$Cr' = CR\left(1 + \frac{\Pi}{P}\Delta\right).$$

Il suit donc de là, qu'à partir d'une situation quelconque du levier

ABED, la courbe DNE doit fournir des bras de levier dont les variations doivent être proportionnelles à la quantité arbitraire Δ. Il faut maintenant construire la courbe DNE et en assigner l'équation; c'est ce qui nous reste à faire pour la solution du problême proposé.

Construisons d'abord la courbe $d\mathrm{R}e$ qui passe par les extrémités r, R, r' des bras de leviers variables correspondans à toutes les valeurs possibles de la variation arbitraire Δ. Il n'est pas difficile de s'assurer que cette courbe doit être une spirale ayant son pôle au point C, et pour rayons vecteurs les bras de levier du contre-poids. Cette spirale peut être engendrée par un point mobile qui se meut uniformement sur le rayon CR, soit vers le centre, soit sur son prolongement, tandis que celui-ci tourne uniformément autour du centre, soit au-dessous, soit au-dessus de sa position CR. La vitesse du rayon, doit être égale à Δ, tandis que celle du point mobile est $a\frac{\Pi}{\mathrm{P}}\Delta$.

Pour avoir l'équation de la courbe $d\mathrm{R}e$, nommons α' l'angle R$\mathrm{C}r'$ que fait le rayon vecteur $\mathrm{C}r'=\mu'$ avec le rayon CR pris pour axe; et l'équation polaire de la courbe, sera évidemment, d'après ce qui précède,

$$\mu'=a\left(1+\frac{a\Pi}{\mathrm{P}}\alpha'\right)\ldots\ldots\ldots\ (10),$$

en observant que l'on doit avoir $\alpha'=\frac{a}{\Delta}$, et ayant soin de prendre α' négatif, lorsque le rayon vecteur μ' tombera au-dessous de l'axe CR. Maintenant si par tous les points de la ligne donnée par l'équation (10), on conçoit une infinité de lignes droites menées perpendiculairement aux rayons vecteurs correspondans, la courbe enveloppe de toutes ces droites sera nécessairement la ligne cherchée DNE. Pour traduire cette génération en langage algébrique, soit μ le rayon vecteur tiré du pôle C à un point quelconque d'une des droites génératrices, $\mathrm{Q}r'l'$ par exemple; en outre désignons par α l'angle variable formé par le rayon vecteur μ et par l'axe CR. Il est facile de reconnnaître que l'équation de la droite $\mathrm{Q}r'l'$, doit être

$$\mu=\mu'\ \mathrm{sec.}\ (\alpha-\alpha')\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

Différentions cette équation par rapport aux seules variables μ' et α', et nous aurons

$$o = d\mu' \text{ sec.} (\alpha - \alpha') - \mu' \text{ tang.} (\alpha - \alpha') \text{ sec.} (\alpha - \alpha') \, d\alpha',$$

ou bien

$$\frac{d\mu'}{d\alpha'} = \mu' \text{ tang.} (\alpha - \alpha');$$

mais à cause de l'équation (10) qui doit toujours subsister entre les variables μ' et α', nous aurons aussi

$$\frac{d\mu'}{d\alpha'} = \frac{a^2\Pi}{P};$$

d'où, en éliminant le coefficient différentiel,

$$\frac{a^2\Pi}{P} = \mu' \text{ tang.} (\alpha - \alpha') \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Divisons, membre à membre, les équations (11) et (12), et nous aurons

$$\frac{P\mu}{a^2\Pi} = \text{cosec.} (\alpha - \alpha') \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

d'où

$$\alpha - \alpha' = \text{arc. cosec.} \frac{P\mu}{a^2\Pi}.$$

Eliminons, à l'aide de cette dernière équation, α' de l'équation (10), et nous obtiendrons la valeur de μ' exprimée par

$$\mu' = a + \frac{a^2\Pi}{P}\left(\alpha - \text{arc. cosec.} \frac{P\mu}{a^2\Pi}\right) \ldots \quad (14);$$

mais la formule (13) nous fournit encore

$$\text{sec.} (\alpha - \alpha') = \frac{P\mu}{\sqrt{P^2\mu^2 - a^4\Pi^2}} \ldots\ldots \quad (15),$$

si donc nous substituons dans l'équation (11) les valeurs de μ' et de sec. $(\alpha - \alpha')$, données par les formules (14) et (15), nous trouverons, après la réduction,

$$\sqrt{P^2\mu^2 - a^4\Pi^2} = aP + a^2\Pi\left(\alpha - \text{arc. cosec.} \frac{P\mu}{a^2\Pi}\right).$$

ou bien

$$\alpha = -\frac{P}{a\Pi} + \sqrt{\frac{P^2\mu^2}{a^4\Pi^2} - 1} + \text{arc. cosec.} \frac{P\mu}{a^2\Pi}.$$

Substituons maintenant dans cette dernière équation les valeurs de P et de Π d'après les formules (1) et (5), et nous trouverons enfin, après toutes les réductions, l'équation

$$\alpha = -\frac{i(R^2 - r^2)}{aR^2} + \sqrt{\frac{i^2(R^2 - r^2)^2\mu^2}{a^4R^4} - 1}$$
$$+ \text{arc. cosec.} \frac{i(R^2 - r^2)}{a^2R^2}\mu \dots\dots\dots\dots\dots (16)$$

qui pourra servir, dans tous les cas, à la construction de la courbe DNE, n'oubliant pas toutefois que nous avons fait $i = \rho h - l$.

On pourra mettre l'équation (16) sous une forme beaucoup plus simple, en posant $\frac{i(R^2 - r^2)}{aR^2} = \zeta$, ou bien

$$\zeta = \frac{R^2 - r^2}{R^2} \cdot \frac{\rho h - l}{a} \dots\dots\dots (17);$$

car elle devient alors

$$\alpha + \zeta = \sqrt{\frac{\zeta^2\mu^2}{a^2} - 1} + \text{arc. cosec.} \frac{\zeta\mu}{a}. \ (18).$$

Les formules (17) et (18) serviront maintenant à la détermination complète de la courbe cherchée; mais les calculs arithmétiques pouvant être encore un peu longs, à cause de la quantité irrationnelle qui entre dans le second membre de l'équation (18), nous ferons arc. cosec. $\frac{\zeta\mu}{a} = \theta$, d'où nous déduirons

$$\text{cosec.}\ \theta = \frac{\zeta\mu}{a} \dots\dots\dots\dots (19)$$

et $\sqrt{\frac{\zeta\mu^2}{a^2} - 1} = \cos.\ \theta$; et en substituant dans l'équation (18), on aura très-simplement

$$\alpha = \theta + \cos.\ \theta - \zeta \dots\dots\dots\dots (20).$$

Les formules (19) et (20) qui déterminent la nature de la courbe

DNE, se construisent aisément à l'aide des tables trigonométriques.

Si la capacité du vase était très-grande par rapport au volume du cylindre plongé, on pourrait supposer $\frac{R^2 - r^2}{R^2} = 1$; et l'on aurait, pour ce cas, $6 = \frac{\rho h - l}{a}$ à la place de la formule (17); mais les deux autres formules (19) et (20) resteraient les mêmes.

ASTRONOMIE.

Résultats des calculs sur la comète Bouvier (*), *communiqués par M.* Gambart, *Directeur de l'observatoire de Marseille, à M.* A. Quetelet.

Les trois seules observations que l'etat du ciel m'ait permis de faire jusqu'ici de la comète que j'ai découverte le 28 du mois dernier dans le Bouvier, donnent les positions suivantes :

	TEMPS COMPTÉ DE MINUIT.	ASCENSION DROITE.	DÉCLINAISON BORÉALE.
1826, oct. 29	19.20.34	220.26.35	34.28.17
30	18.26.35	221.13.30	32.45.46
31	18.44.43	222. 2.20	30.53. 5

(*) Cette comète fut découverte le 22 octobre à Florence, par M. *Pons;* le 24 à Paris, par M. *Bouvard,* et le 28 à Marseille, par M. *Gambard* qui a conséquemment fait les trois observations de rigueur et, en moins de huit jours, tous les calculs nécessaires pour déterminer la trajectoire de la comète.

A. Q.

En partant de là, le calcul m'a conduit à une orbite dont voici les élémens :

Passage au périhélie 1826, 322jours,7172 (18 novembre), temps moyen compté de minuit;

Distance périhélie.......... 0,01 74
Longitude du périhélie...... 160°.32.43
Longitude du nœud ascend.t. 237.17.50
Inclinaison................ 89.39.43

Mouvement direct.

	Erreur en long.	Err. en lat.
Oct. 29	+ 12″	− 4
30	− 1	0
31	− 12	+ 2

Une conséquence très-remarquable de cette orbite, c'est que le 18 novembre jour même du passage au périhélie, la terre étant en 1s 25°. 33′ de longitude, la comète se projettera sur le disque du soleil.

Entrée de la com. sur le disq. du sol... 7 h., 3 du matin.
Plus courte distance au centre 5′
Sortie.............................. 10,2

Les données sur lesquelles reposent ces derniers résultats relatifs à l'époque où doit arriver le phénomème, sont évidemment trop peu sûres pour qu'il soit permis d'y compter : mais le passage lui-même, peut être considéré dès aujourd'hui, je crois, comme certain. En effet, pour qu'il n'eût pas lieu, il faudrait que les élémens rapportés ci-dessus, s'écartassent d'une manière tout-à-fait extraordinaire de la vérité; or, c'est ce qui ne me paraît nullement probable. Les circonstances sont favorables à la détermination du nœud. En outre, si la comète était à son périhélie dès le 17, ou qu'elle ne s'y trou-

vât que le 20, au lieu du 18, le passage n'en arriverait pas moins. Peut-être faudrait-il même étendre davantage ces limites; mais je n'ai fait aucun calcul là-dessus.

J'aurais désiré d'avoir quelques données plus précises sur cet important phénomène; mais il aurait fallu pour cela, une quatrième observation au moins; et depuis plusieurs jours je l'ai inutilement attendue.

PHYSIQUE.

Tableau des températures moyennes centigrades de quelques points d'Europe, par mois, saisons et années, tiré de la Géographie des plantes de M. Schow, *Professeur à l'Université de Copenhague.* Les températures sont corrigées sous tous les rapports et réduites au vrai *medium.*

	Upsala.	Copenh.	Londres.	Paris.	Genève.	Zurich.	Bude.	Rome.	Palerme
Janv.	−5 49	−1 54	+1 92	+2 99	+1 16	−3 17	−2 69	+7 18	+10 78
Févr.	2 98	2 67	3 27	4 01	2 87	+0 94	+0 65	8 18	10 78
Mars.	1 48	1 11	5 95	6 14	5 86	4 51	3 64	10 71	12 11
Avril.	+4 55	+5 89	7 80	10 46	9 74	7 58	9 63	13 71	14 51
Mai.	9 55	11 63	11 95	13 60	16 75	15 30	18 37	18 11	17 71
Juin.	14 54	16 80	15 16	16 64	17 06	16 35	20 19	21 58	20 48
Juillet.	17 07	18 30	16 66	17 98	17 72	18 68	21 82	23 18	22 38
Août.	15 75	16 68	16 46	17 56	14 70	18 43	22 01	22 88	23 18
Sept.	10 97	14 28	13 54	15 10	10 85	14 14	16 77	20 07	21 57
Octob.	6 03	8 65	9 09	10 03	15 01	9 60	11 01	16 77	19 77
Nov.	0 08	3 28	4 99	6 18	50	3 58	4 69	12 07	15 57
Déc.	−3 95	−1 20	2 57	2 77	2 22	−1 21	0 50	8 48	12 30
Hiver.	−4 14	−1 80	+2 58	+3 26	+2 08	−1 15	−0 85	+7 95	+11 31
Print.e	+4 21	+5 47	8 57	10 07	9 78	+9 13	+10 55	14 18	14 78
Été.	15 79	17 26	16 09	17 39	17 16	17 82	21 34	22 55	22 02
Autom.	5 69	8 73	9 21	10 44	10 12	9 10	10 82	16 30	18 97
Année.	+5 39	+7 42	+9 12	+10 29	+9 79	+8 73	+10 45	+15 24	+16 77

On observera que la totalité du mois de décembre, janvier et février, font l'hiver. En multipliant les résultats consignés (*Corresp.* pag. 288) par $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, on ramènera les résultats des quatrième et septième colonnes au thermomètre centigrade, c'est-à-dire qu'ils deviendront comparables à ceux du tableau ci-dessus.

J. G. G.

MÉTÉOROLOGIE.

Observation d'une couronne lunaire colorée; par M. CH. F. A. MORREN, *cand. en sciences à l'Université de Gand.*

Le 8 décembre 1826, je vis à Gand, vers 9 heures du soir, une des plus belles couronnes lunaires ou halos qu'il soit possible d'observer. La beauté de ce phénomène m'a engagé à en donner la description. Je n'entrerai dans aucune explication; je me contenterai d'observer que ce météore ayant fixé l'attention de M. *Arago*, c'est à l'explication qu'en a donnée ce célèbre physicien que le lecteur doit recourir.

Le 8 décembre, au soir, le ciel était en quelques endroits, parsemé d'étoiles; mais sa plus grande surface était couverte de larges et gros nuages floconneux, entre lesquels se montrait la lune dont la phase était le 6 (deux jours avant notre observation) à 7 heur. 58′ du matin ☽. Entre 8 et 9 heures, un halo se manifesta : la couronne (*fig.* 93) était double ou formée de deux cercles concentriques parfaitement dessinés. L'intérieur était d'une teinte roussâtre à son pourtour extérieur : cette teinte se changeait en jaune et se confondait enfin avec le bleu céleste blanchâtre dont l'espace entre la lune et ce cercle était coloré. Après la teinte roussâtre ou le cercle intérieur,

venait un espace circulaire d'un bleu céleste foncé, entièrement semblable au reste du ciel. Enfin, on reconnaissait le cercle extérieur à une bande circulaire d'un rouge pâle passant bientôt au pourpre. D'après ces observations, on a pour les teintes, depuis la lune jusqu'au cercle extérieur, la série suivante :

Bleu blanchâtre, *jaune, brun ;* bleu foncé, *rouge pâle, pourpre :* la largeur du cercle intérieur était aussi beaucoup plus grande que celle du cercle extérieur : le rapport est comme 1 : 3.

M. *Quetelet* dans le récit de son observation d'un halo solaire (tom. II, pag. 281), dit que le diamètre du cercle que présentent les halos, est communément de 45° à 46°. Il ajoute : « Il s'en forme rarement de seconds qui sont alors concentriques et d'une amplitude double des premiers ». Ceci n'a pas eu lieu pour celui que nous avons observé : en effet, le diamètre extérieur de la seconde couronne, était d'environ 44°, celui de la couronne intérieure de 30° (pris à l'extérieur de chaque circonférence). Quant aux distances de la lune, voici ce que nous avons remarqué. Si l'on partage le diamètre extérieur du second cercle en quatre parties égales (en le supposant de 40°), trois de ces parties seront occupées par le diamètre de la première couronne.

Ce phénomène qui semble ainsi s'éloigner de quelques observations auxquelles il a donné lieu, dura environ trois-quarts d'heure.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Analyse des Elémens de Géométrie de M. le professeur De Gelder, *par M.* Verdam, *Lecteur à l'Université de Groningue* (*).

La manière la plus simple de faire cette analyse, est, suivant nous, d'indiquer ce qui est contenu dans chaque livre, de mentionner les choses remarquables qui s'y trouvent, et de dire, en général, un mot de la méthode suivie dans ce traité. C'est ainsi que nous essayerons de donner une idée des *Élemens de Géométrie* de M. le professeur *De Gelder*.

Première Partie. — *De la Géométrie des Plans.*

Notions préliminaires, définitions, axiomes, etc.

Livre I. *Des droites, des angles, des triangles, des perpendiculaires et des parallèles.*

La définition de l'angle est celle-ci : « l'angle rectiligne est l'es-
» pace infini compris entre deux droites qui concourent en un
» point, et peuvent être prolongées. »

Livre II. *Des proportions et de leurs propriétés fondamentales.*

Ce livre traite des proportions des grandeurs en général. Toutes les propriétés des proportions simples et composées, sont démontrées avec toute la rigueur possible ; et toujours, où il était nécessaire, dans le cas de l'incommensurabilité des deux rapports.

(*) *Correspondance*, tom. II, pag. 294-96.

Livre III. *Des parallélogrammes, rectangles et carrés; des aires des figures rectilignes.*

Le théorème de *Pythagore* qu'on rencontre dans ce livre, est fondé sur ce que les carrés des côtés qui comprennent l'angle droit, est équivalent aux rectangles formés de l'hypothénuse et d'un des segmens de cette hypothénuse, déterminés par la perpendiculaire qu'on lui abaisse du sommet de l'angle droit.

Livre IV. *Des lignes proportionnelles; des propriétés des triangles et des figures semblables.* La théorie de la corrélation ou similitude des figures, est traitée dans ce livre d'une manière extrêmement soignée.

Livre V. *Du cercle et de ses propriétés.*

Livre VI. *Des polygones régulières; de la quadrature du cercle, et des figures isopérimétriques.*

Relativement à la quadrature du cercle, M. *De Gelder* démontre 1.° que la circonférence d'un cercle, est plus grande que le contour d'un polygone régulier inscrit, plus petite que celui d'un polygone régulier circonscrit. 2.° Que deux cercles concentriques étant donnés, on peut inscrire au plus grand un polygone régulier, et circonscrire au plus petit un polygone régulier, sans que les côtés du premier polygone, touchent la circonférence plus petite, et sans que les angles du second polygone se trouvent sur la circonférence plus grande. Au moyen de ces lemmes, il prouve 3.° que les circonférences et les aires des cercles, sont entre eux, comme les rayons et les carrés des rayons, et cela d'après la méthode des limites, par laquelle il a prouvé précédemment que l'aire d'un cercle, égale la circonférence multipliée par la moitié du rayon. — La recherche du nombre 3,14159 est tirée de la comparaison des aires des polygones inscrits et circonscrits, en doublant à chaque approximation le nombre des côtés, ce qui fait voir, en même temps, que « les aires de ces polygones, même sous un nombre infini de côtés, » sont incommensurables par rapport aux aires des carrés inscrits et » circonscrits. »

Livre VII. *De la résolution des Problêmes de Géométrie.*

Livre VIII. *De la Goniométrie.*

On trouve dans ce livre 171 formules de Goniométrie, qui sont les plus utiles. L'auteur a pris soin de développer les règles à suivre, lorsqu'on compte les angles et les lignes goniométriques, dans les différents quadrants, pour assigner leur état positif ou négatif. Il a expliqué le

calcul de sin. x, cos. x, etc., log. sin. x, c'est-à-dire, la formation des tables de sinus et logarithmes. Parmi les formules de goniométrie, se trouvent aussi les séries, pour développer les lignes goniométriques en fonction des arcs qu'ils mesurent, et réciproquement. Comme cette analyse est propre à l'auteur, nous expliquerons sa marche. Pour développer, par exemple, sin. x en série (et la même méthode s'applique à tang. x, etc.) l'auteur prouve que la forme de la série, doit être

$$\sin. x = x + Ax^3 + Bx^5 + \text{etc.}$$

Mais alors on a aussi

$$\sin. y = y + Ay^3 + By^5 + \text{etc.}$$

Donc

$$\sin. x - \sin. y = (x - y) + A(x^3 - y^3) + B(x^5 - y^5) + \text{etc.}$$

D'où il dérive

$$\frac{\text{cord.}(x-y)}{x-y} . \cos. \tfrac{1}{2}(x+y) = 1 + A(x^2 + xy + y^2)$$
$$+ B(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + \text{etc.}$$

En faisant $x = y$, on a

$$\text{corde}\,(x-y) : (x-y) = 1 : 1,$$

et

$$\cos. x = 1 + 3Ax^2 + 5Bx^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots\; (\alpha)$$

On a donc de même

$$\cos. y = 1 + 3Ay^2 + 5By^4 + \text{etc.}$$
$$\cos. x - \cos. y = 3A(x^2 - y^2) + 5B(x^4 - y^4) + \text{etc.}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\text{cord.}(y-x)}{(y-x)} . \sin. \tfrac{1}{2}(x+y) = -3A(x+y) -$$
$$5B(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \text{etc.}$$

En posant de nouveau $x = y$, on trouve

$$\sin. x = -2.3Ax - 4.5Bx^3 - \text{etc.}$$

et en comparant les coefficiens de cette série, avec les coefficiens homo-

logues de la série adoptée

$$\sin. x = x + Ax^3 + Bx^5 + \text{etc.}$$

qui doit être identique avec la première, on en tire les valeurs de A, B etc., qui donnent la série de sin. x. On a en même temps la série de cos. x.

Livre IX. *De la Trigonométrie rectiligne.*

Outre les solutions des différens cas pour la résolution des triangles rectangles et obliquangles, on trouve dans ce livre une solution du problême de *Snellius*, de même que les formules pour les cas compliqués dans la mesure des hauteurs et des distances.

SECONDE PARTIE. — *De la Géométrie des Solides.*

Livre X. *De la position et de l'intersection des droites et des plans; des angles polyèdres.* On trouve dans ce livre une démonstration curieuse du théorème suivant : *Si deux droites sont situées dans des plans différens, il existe une seule droite qui coupe les droites données à angles droits, et cette droite mesure en même-temps la plus courte distance des droites données.*

Nous croyons que ce qui regarde les angles solides, contenu sous treize théorèmes, est traité d'une manière propre à l'auteur.

Livre XI. *Des Corps polyèdres, et, en particulier, des prismes, parallélipipèdes, pyramides, etc.; de la mesure de leur solidité; et des propriétés des solides semblables.*

L'auteur à l'occasion du problême « trouver le côté d'un cube qui soit à un cube donné comme $p : q$ » donne une solution particulière pratique du problême des deux moyennes proportionnelles, dont il avait déjà exposé une solution pratique dans le livre VII.

Livre XII. *Du cylindre, du cône et de la sphère, de la mesure de leur solidité,* etc. On y remarque entre autres une démonstration géométrique fort simple du théorème « *que la surface d'un triangle sphérique est à la surface de la sphère, comme la somme des trois angles sphériques moins deux angles droits, est à huit angles droits.* »

Livre XIII. *De la Géométrie des angles trièdres, ou de la Trigonométrie sphérique.*

Les formules générales pour la résolution de tous les cas dans les triangles sphériques obliquangles, sont dérivées des formules simples pour les cas des triangles rectangles; quelques cas des triangles obliques

sont résolues par les séries et par approximation, et tout est éclairci par des problêmes utiles de géographie astronomique, de géodésie, et de la position des plans. L'auteur y a ajouté la solution de trente problêmes, relatifs à la trigonométrie sphérique et à la mesure des angles plans et solides, et des solidités des corps géométriques, parmi lesquels se trouvent les cinq corps réguliers.

Comme appendices à ces élémens de géométrie, l'auteur a ajouté les deux livres suivans :

Livre XIV. *De la théorie des transversales, et de l'application de cette théorie.* L'auteur a démontré douze théorèmes sur les propriétés des droites et des plans, qui coupent, comme transversales, des triangles, des polygones, soit plans, soit gauches, des systèmes de lignes concourantes, et les faces d'une pyramide. Il a appliqué cette théorie à la résolution des problêmes de géométrie pratique, qui sont utiles dans l'arpentage, où l'on n'emploie que le mètre et des jalons; (Parmi ces problêmes, on rencontre aussi ceux résolus à la page 133 du n.° III de la Corresp., II vol.); ensuite il a montré l'usage de cette théorie dans la démonstration de certains théorèmes de géométrie; ce sont entre autres les théorèmes remarquables « *que les points d'intersection des tangentes extérieures à trois cercles, et des droites qui passent par les centres, sont en ligne droite;* » — « *que les points d'intersection des côtés opposés prolongés des triangles, carrés et hexagones inscrits et circonscrits à un cercle, sont en ligne droite,* etc., etc. » Tous les théorèmes des transversales sont démontrés à l'aide des premiers théorèmes fondamentaux de la géométrie.

Livre XV. *Des Elémens de la polygonométrie et de la polyèdrométrie.*

On a suivi dans ces élémens la méthode synthétique; ce n'est que dans la résolution des problêmes, et souvent dans la goniométrie, et la trigonométrie, que l'auteur a eu recours à la méthode analytique : c'est aussi seulement dans ces applications de la géométrie qu'il a fait usage de l'algèbre; mais tous les théorèmes de pure géométrie, sont démontrés d'une manière géométrique, et jamais l'auteur ne s'est permis d'admettre l'inverse d'un théorème, sans l'avoir démontré; jamais il n'a perdu de vue la généralité des propositions, surtout dans les théorèmes qui concernent la corrélation des figures de géométrie. Enfin ces élémens contiennent, sous beaucoup de rapports, des choses nouvelles et

précieuses pour l'enseignement (*), et nous osons affirmer qu'il n'existe, à notre connaissance, aucun ouvrage préférable à celui-ci.

Observations astronomiques publiées par le Bureau des longitudes. In-folio. Paris, 1826; BACHELIER.

D'après une décision du bureau des longitudes, les observations astronomiques faites à l'observatoire de Paris, depuis le 29 août 1800, jusqu'au 1.er janvier 1810, avaient été publiées successivement dans différens volumes de la *Connaissance des temps*. Par une nouvelle décision, il fut arrêté depuis que les observations seraient désormais imprimées à part, dans le format in-folio. Le volume que le Bureau des longitudes publie aujourd'hui, formera le premier de la collection : il contient les observations faites à la lunette méridienne, au quart de cercle, à la machine parallactique, etc., depuis le 1.er janvier 1810, jusqu'au 31 décembre 1819. Ce recueil précieux qui présente une série de huit années d'observations faites avec des instrumens excellens, et par des hommes du premier mérite, est un véritable monument élevé aux connaissances astronomiques.

Les observations des passages ont été faites avec une lunette achromatique de deux mètres et demi de longueur, et de onze centimètres d'ouverture, qui fut commandée à *Ramsden*, et achevée par *Berge*, son successeur. Le grossissement de la lunette, n'atteint pas tout-à-fait cent, et le réticule est composé d'un fil horizontal, et de cinq fils verticaux également espacés. Les observations faites aux cinq fils, occupent cinq colonnes dans le recueil; et une sixième colonne indique les pas-

(*) Nous venons d'apprendre que l'auteur va s'occuper de la rédaction d'une troisième édition qu'il veut approprier à l'enseignement dans les Universités, où, à l'exception des étudians en sciences, les autres ne s'occupent guère de la Géométrie et des Trigonométries (1). La troisième édition paraîtra donc en deux volumes : la Goniométrie, les Trigonométries et la Polygonométrie composeront le second volume, et la pure Géométrie des plans et des solides formera un volume unique.

(1) Le dernier décret de Sa Majesté (Corres. Tom. II, Pag. 304) doit remédier au mal que signale ici M. *Verdam*. J. G. G.

sages conclus. Le mouvement diurne de la pendule et les occultations des étoiles se trouvent soigneusement indiqués, ainsi que les principales circonstances que présentaient les dernières observations.

On avait pour prendre les distances méridiennes au zénith, deux quarts de cercle muraux, établis sur les deux faces orientale et occidentale, d'un grand massif en pierres de taille, élevé avec une parfaite solidité dans le plan du méridien. Le premier quart de cercle, celui qui sert à faire les observations du côté du midi, a été placé en 1800, après avoir servi long-temps à M. *Le Monnier*. Cet instrument est du célèbre artiste *Bird*; il a deux mètres et demi de rayon. La lunette qui est aussi de deux mètres et demi de longueur, a 60 millimètres d'ouverture : son grossissement est de 70 à 80 fois. Le limbe du quart de cercle, porte deux divisions; l'une en 90 degrés, qu'on appelle *intérieure*, parce qu'elle est la plus rapprochée du centre; l'autre en 96 parties, qu'on nomme *extérieure*. Chaque degré de la première est divisé de cinq en cinq minutes, et chaque partie de la seconde est subdivisée en seize. Les distances au zénith sont présentées dans trois colonnes consécutives : la première renferme les degrés, minutes et secondes donnés par la division intérieure réduite; la seconde contient la lecture de la division intérieure, en grandes divisions du limbe, en parties de ces divisions, etc., et la troisième colonne, enfin, renferme la division extérieure réduite en degrés sexagésimaux. La même page offre de plus les hauteurs du baromètre, exprimées en millimètres et centièmes de centimètres, ainsi que les hauteurs des thermomètres intérieur et extérieur en degrés de la nouvelle division centésimale. Dans l'*introduction*, à laquelle sont empruntés la plupart de ces détails, on a donné la valeur de l'erreur de collimation de l'instrument pour toutes les zones célestes comprises entre 3° 3′, et 74° 51′ de distance au zénith, ainsi que l'indication des moyens qui ont servi à la déterminer.

Le second quart de cercle, construit par *Sisson*, à 1^{m},62 de rayon : il offre un système de division intérieure et extérieure du limbe, semblable à celui du quart de cercle de *Bird*. La lunette grossit environ 60 fois. Les deux instrumens précédens sont remplacés, depuis 1823, par un cercle mural du célèbre artiste *Fortin*.

Aux observations de la lunette méridienne et du quart de cercle mural, faites en commun par MM. *Bouvard*, *Arago*, *Mathieu* et

Nicollet (*), succèdent les observations faites à la machine parallactique. Ce dernier instrument, construit par *Bellet*, est armé d'une lunette d'un mètre de long, de 65 millimètres d'ouverture et d'un grossissement de 40 à 50 fois. Les diamètres des cercles qui la composent, ne dépassent pas 35 centimètres. C'est avec cet instrument qu'ont été faites les observations des comètes et celles de la libration de la lune. Ces dernières observations, par leur nombre et leur importance, méritent une attention particulière : on peut les partager en trois séries. Toutes se rapportent à la tâche connue sous le nom *Manilius*. Les observations de la première série, ont été faites conjointement par MM. *Bouvard* et *Arago* : cette série s'étend du 1.er mars 1806 au 24 juin de la même année. La seconde série a été faite par M. *Bouvard*. Cet excellent observateur l'a prolongée depuis le 26 septembre 1808, jusqu'au 13 octobre 1810. La troisième série, qui commence le 7 avril 1819, et finit le 1.er février 1820, est due à M. *Nicollet* qui a utilisé ces précieux matériaux dans son mémoire sur la libration de la lune, imprimé dans la *Connaissance des temps pour* 1822.

Jusqu'à présent les observations au cercle répétiteur n'ont point encore paru, le bureau des longitudes se réserve de les publier dans le volume suivant. Ce second volume de la collection, qui renfermera aussi les observations faites aux autres instrumens, depuis le 1.er janvier 1820, jusqu'au 1.er janvier 1826, est entièrement imprimé, et ne tardera pas à paraître (**).

A. Q.

*** Nous nous bornerons ici à annoncer l'*Astronomie élémentaire* de notre collaborateur M. *A. Quetelet*, faisant partie de la *Bibliothèque*

(*) M. *Gambart*, ancien élève à l'Observatoire, a aussi pris part aux observations pendant les années 1818 et 1819.

(**) On trouve dans la Bibliothèque universelle de Genève, tom. 27, pag. 257, tom. 28, pag. 89, 173, 253 et tom. 29, pag. 3 et 89, *un coup-d'œil sur l'état actuel de l'Astronomie pratique*, par M. *Gautier*. Cet intéressant travail est analysé avec soin dans le Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques, publié sous la direction de M. le baron *Férussac*.

J. G. G.

industrielle, Sciences, publiée à Paris. Cet ouvrage se trouve à Bruxelles, chez M. *Berthot*, libraire. Quoique nous nous proposons d'en rendre compte dans le prochain cahier de la Correspondance, nous croyons devoir dire ici qu'il est particulièrement destiné aux personnes qui, peu familiarisées avec les sciences mathématiques, désirent néanmoins acquérir des notions sur le système du monde et sur les forces qui le régissent. Tel est le but que l'auteur s'est proposé, et il ne nous sera pas difficile de prouver qu'il l'a atteint.

J. G. G.

⁂ *Elementa Arithmeticæ, Algebræ et Geometriæ*, in usum prælectionum Academicarum ; auctore J. G. GARNIER. Editio altera, magnopere adaucta et accuratissime recognita. In-8.° Se trouve chez *Hipp.te Vandekerckhove*, imprimeur-libraire, Avenue de la Place-d'Armes, n.° 5, à Gand.

⁂ Il vient de paraître chez le même imprimeur-libraire à Gand, une cinquième édition de la Physique Mécanique de *F. G. Fischer*, avec les anciennes notes de M. *Biot*, et un appendice sur les anneaux colorés, sur la double réfraction et sur la polarisation de la lumière du même physicien : cette édition, revue, corrigée et considérablement augmentée par un professeur d'une de nos Universités, offre un volume in-8.° de 518 pages, avec VII planches. Les additions les plus étendues sont comprises sous le titre : Supplément à la Physique de *Fischer*; le texte de l'auteur a été religieusement conservé. On est donc autorisé à croire que cette édition sera aussi favorablement accueillie que les précédentes. J. G. G.

⁂ M. *J.-B. Guinard*, dont il nous est arrivé de faire un Docteur en sciences par anticipation, vient d'ajouter enfin ce titre à ceux de Docteur en médecine, en chirurgie et en accouchemens, premier exemple d'une cumulation aussi honorable dans l'Université de Gand. Cet élève avait

préludé à ces succès par deux mémoires couronnés; l'un en réponse à la question proposée en 1820—1821, ayant pour énoncé : *Invenire formulas quarum ope, dato cuilibet systemati coordinatarum in spatio, aliud quoddam systema substituitur*, etc. (Corresp., tom. I, pag. 83); l'autre en réponse à celle-ci : *Requiritur 1° enunciatio generalis principii velocitatum virtualium*, etc. (Corresp., tom. I, pag. 83) (*); on sait que l'auteur d'un mémoire couronné, est interrogé sur sa pièce par la faculté qui a proposé la question, non pas dans la vue de constater la propriété du fonds, car on n'exige pas d'invention; mais de reconnaître s'il s'est approprié son sujet, au point de le dominer et de voir au-delà (**). La dissertation inaugurale de M. *Guinard*, pour le grade de Docteur, a pour titre : *De transformatione vel reductione æquationis generalissimæ secundi gradus inter tres variabiles et de nonnullis proprietatibus quibus gaudent superficies centro præditæ* : ce sujet n'est qu'une suite à la première des deux réponses couronnées, que l'auteur en a détachée, comme il l'annonce dans le début de sa dissertation. La manière dont M. *Guinard* avait précédemment satisfait aux examens; ses réponses aux questions faites sur divers points de sa dissertation, et aux objections contre ses positions, lui ont mérité le diplôme le plus honorable : il est médecin-géomètre; car il fait la médecine par état et

---

(*) D'après le compte que nous en avons rendu, le géomètre *Lacroix* a desiré prendre connaissance de ce mémoire dont nous lui avons donné communication.

(**) C'est ainsi qu'un Géomètre connu par des ouvrages estimés, M. le professeur *Bourdon*, aujourd'hui Inspecteur de l'Académie de Paris, a choisi pour sujet de la première thèse défendue devant la Faculté des sciences de Paris; 1.° *la Théorie des axes principaux des corps solides* : 2.° *celle d'un corps solide autour d'un point fixe*. Il nous suffira de citer ces titres pour qu'on reconnaisse que l'exposition et l'examen des cas particuliers, étaient tout ce qu'on pouvait attendre de neuf sur le premier point, et que le second ne pouvait être, comme le dit l'auteur, qu'un extrait du Traité de Mécanique de M. *Poisson*. Cette thèse soutenue le 9 mars 1811, est suivie du programme de la thèse d'astronomie, soutenue le 25 mars 1811. A cette époque la Faculté des sciences de Paris était composée de MM. *Lacroix*, Doyen, *Biot*, Dinet, *Poisson*, *Francoeur*, *Thenard*, *Gay-Lussac*, *Hachette*, *Haüy*, *Brongniard*, *Desfontaine*, *Mirbel*, *Geoffroy St.-Hilaire* et *Duvernoy*. Une pareille composition ne laisse rien à désirer, à un nom près qui probablement figure dans la Faculté régénérée, si cependant il y a encore une faculté des sciences.

avec succès, et les sciences par goût : j'appellerais à l'inverse géomètre-médecin, celui qui ferait des mathématiques par métier, et de la médecine pour tuer le temps. J. G. G.

⁂ Dans le n.° 2 du II.e volume de la Correspondance pag. 121 et 122, nous avons rendu compte d'un mémoire de M. *Bondewin Donker Curtius* en réponse à une question physique proposée par l'Université de *Leyden*, et nous avons observé que l'auteur, à l'époque de son travail, en 1822—1823, ne pouvait avoir connaissance des recherches de MM. *J.-F. Demonferrand*, *Savari* et *Ampère* sur l'électro-dynamique. M. *J.-D.-B. Mareska*, élève en sciences de l'Université de Gand, dans sa dissertation inaugurale pour l'obtention du grade de Docteur, qu'il a dédiée à M. le professeur *Timmermans*, et qui a pour titre : *De legibus mathematicis electricitatis dynamicœ*, a repris les choses au point où les avait laissées M. *Donker Curtius*; non cependant sans avoir tracé un court historique de ce qui avait été fait précédemment, historique qu'il termine en disant : « Sed sufficiat hic nobis exponere quomodo » hæ observationes calculo fuerint submissi; quomodo ope calculi his » physicorum experimentis innitentis, lex hujus attractionis possit » determinari. » Après quoi il entre en matière, et démontre la formule générale *cujus ope omnia resolvi possunt problemata electrodynamica*. Cette partie de la dissertation est traitée d'une manière lumineuse ; nous regrettons seulement que l'auteur, pressé par le temps, n'ait pu donner à la révision des épreuves tout le soin qu'elle aurait exigé. L'autre partie de la dissertation appartient à l'histoire naturelle qui n'est pas de notre domaine; elle est présentée sous le titre : *Positiones*, qui sont au nombre de treize. M. *Mareska*, l'un des élèves distingués de notre Université, a été couronné à l'Université de Liége pour sa réponse à la question proposée en 1822—1823, ayant pour énoncé : *Theoria limitum perspicue exponatur, ejusque usus exemplis nonnullis e geometria analytica sumtis, illustretur*, et à celle de Gand pour sa pièce en réponse à cette question mise au concours en 1822—1823 : *Investigationes mere mathematicas de causticis per reflexionem et refractionem a tempore Tschirnhausen, usque ad nostram ætatem factas, enarrare.*

M. *Mareska* ne s'est pas borné à l'étude des sciences; il est candid
en médecine, et MM. les professeurs des deux facultés s'accordent da
leur opinion sur son compte. D'après cela, il serait presqu'inutile d'ajout
que cet excellent élève a obtenu le diplôme le plus honorable. Lan
provisoirement dans la carrière de l'enseignement des mathématiques a
Collége royal de Gand, nous désirons dans l'intérêt de cet établisse
ment, que ce provisoire tourne en définitif, et que l'auteur de la dis
sertation succède à celui auquel il en a fait l'hommage.

J. G. G.

⁂ Dans la note au bas de la page 276, sur la nouvelle démonstration du principe des vitesses virtuelles, par M. *Ampère*, nous avons oublié de rappeler que ce Géomètre, lorsqu'il n'était encore que repétiteur à l'Ecole Polytechnique, a donné dans le XIIIe cahier du journal de cette école, une démonstration du même principe, dégagée de la considération des infiniment petits, suivie de deux notes relatives à la démonstration des théorèmes algébriques sur lesquels est appuyée l'analyse qu'il a employée. On remarque qu'en partant des mêmes vues, l'auteur a singulièrement simplifié sa première démonstration, et qu'il ne s'est plus astreint comme dans son premier travail, à l'obligation de rejeter la considération des infiniment petits, ce qui sans ajouter à la rigueur, nuit beaucoup à la brièveté.

J. G. G.

⁂ On nous écrit que le procédé pour obtenir le rapport de la circonférence au diamètre, que nous avons exposé (Corresp., tom. I, pag. 257), a déjà été publié en 1816 par M. *J.-H. van Swinden*, pag. 316 de la 2.e édition de ses Elémens de Géométrie, où ce Géomètre dit l'avoir trouvé dans les papiers du célèbre *Huyghens*, énoncé dans ces termes : *Si ad rectam quæ potest duo quadrata simul, quadratum radii et quadratum sinus arcus* 22° 30′, *addatur in rectum semissis radii, composita recta æqualis erit peripheriæ quadrantis.* Ce grand

Géomètre y avait ajouté de ses propres mains : reçu de M. *l'ambassadeur Chanut*, qui se trouvait en Suède lors de la mort de *Descartes*. On ajoute que M. le professeur *De Gelder* avait, à la vérité, communiqué à M. *Van Swinden*, une construction publiée au même endroit de l'ouvrage cité, construction d'autant plus remarquable qu'elle se fonde sur le rapport d'*Adrien Metius*. Nous avons consulté l'ouvrage cité de M. *Van Swinden*, et nous avons reconnu que la construction qu'on y trouve, diffère essentiellement de celle que nous avons consignée dans la Correspondance.

LES EDITEURS.

*** Dans le recueil des travaux de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, pour l'année 1825, on trouve 1.° un mémoire sur la photométrie, par M. *D. Colladon*, de Genève; 2.° un mémoire sur la sphère par M. *Alphonse Heegmann*; 3.° une théorie des bateaux aqua-moteurs, propres à remonter les fleuves et à les descendre plus rapidement par la seule action de leur courant, par M. *Th. Barrois*; 4.° Considérations sur l'importance et les moyens de l'application des machines à vapeur, sous le rapport de la guerre, par M. *Delisle*, qui y a aussi inséré une note sur un moyen que l'on croit propre à favoriser l'effet de la traction des chevaux attelés aux voitures. Le recueil de la même société pour 1823, contient un mémoire de M. *Delezenne* sur les mélanges ou combinaisons de l'eau avec l'alcool et l'acide sulphurique, avec deux notes du même, l'une sur l'emploi du cercle répétiteur, l'autre sur la polarisation de la lumière réfléchie par l'air serein (Corresp., 1.er vol., pag. 338). Nous rendrons compte des deux premiers mémoires qui nous paraissent rentrer plus spécialement dans le domaine de la Correspondance.

J. G. G.

*** La théorie des transversales dont le principe est dû aux anciens, s'est tellement accrue dans ces derniers temps, par les travaux des *Carnot*, des *Monge*, des *Hachette*, *Brianchon*, *Chasles*, *Servois*,

Poncelet, Ferriot, Sturm, Gergonne et autres Géomètres, qu'il ne fau pour faire un Traité sur ce sujet, que choisir les matériaux et le coordonner. C'est ce que j'ai entrepris de faire à l'occasion d'un cours sur cette branche de Géométrie, que je donne à l'Université de Gand. Ce travail aura, au moins, cet avantage d'offrir la substance de ce qui a été fait sur cette matière d'une inépuisable fécondité, et de servir d'introduction aux ouvrages cités. Déjà M. le professeur *De Gelder* a fait des transversales le sujet du livre XIV de sa Géométrie, mais il a dû restreindre son plan, et le nôtre sera étendu aux pôles et polaires réciproques, aux propriétés projectives des figures, en nous bornant cependant à un ensemble de notions nécessaires et suffisantes pour le but indiqué. Nous livrerons ce travail à l'impression, si nous réunissons un nombre de souscripteurs, suffisant pour couvrir les frais. Ce traité in-8.° sous le titre : *Théorie élémentaire des Transversales,* comprendra au moins dix feuilles avec un assez grand nombre de planches. On pourra souscrire chez M. *Hippolite Vandekerckhove,* imprimeur-libraire, Avenue de la Place-d'Armes, n.° 5, à Gand.

J. G. G.

Lettre de M. Gambart, *Astronome à Marseille, à M.* A. Quetelet (*).

En annonçant le 6 de ce mois (novembre) le passage de la comète du Bouvier sur le soleil, je ne pouvais point en fixer l'instant précis; mais une pareille annonce suffisait pour mettre les Astronomes à même de diriger leurs recherches de manière à ne pas laisser échapper le phénomène, s'il avait lieu pendant le jour.

Les observations que j'ai faites les 7, 8, 9 et 10 dernier, m'ont permis d'arriver à une connaissance beaucoup plus approchée des élemens de l'orbite. J'ai été conduit à augmenter l'inclinaison qui se trouve la plus

(*) Cette lettre ne nous est parvenue qu'au moment où nous terminions le cahier actuel.

grande qui ait été observée jusqu'ici. Le mouvement héliocentrique, de direct qu'il paraissait d'abord, est devenu rétrograde; mais il serait possible que de nouvelles recherches donnassent encore un changement à cet égard. Ainsi, l'on pourra voir en rassemblant les travaux auxquels aura donné lieu cette comète, des orbites fondées sur des observations également bonnes, qui différeront quant au sens du mouvement : cette circonstance tient à la grande inclinaison du plan de la trajectoire sur l'écliptique.

Passage au périhélie 1826, 322,j.8085 (18 novembre), temps moyen à Marseille, compté de minuit.

Distance périhélie....................	0,023314
Longitude du périhélie..................	314°. 57'. 28"
Longitude du nœud.................	236. 9. 54
Inclinaison..........................	89. 59. 24
Mouvement rétrograde.	

	Erreur en long.	Err. en lat.
Oct. 29	+ 1' 2"	— 1' 33"
31	+ 3	— 9
Nov. 7	— 38	— 18
8	— 1 11	— 57
9	— 50	+ 1 56
10	— 2	— 5

Cette nouvelle orbite qui représente d'une manière assez satisfaisante les observations du 29 octobre au 10 novembre, permet de déterminer avec une certaine exactitude les circonstances du passage de la comète par son nœud descendant.

Entrée de la comète sur le disque du soleil, le 18 novembre, à $5^{h.}$ 25' du matin, t. v.

Passage par le nœud..............................	$7^{h.}$ 1'
Plus courte distance de la comète au centre du soleil....	2' 40"
Sortie de dessus du disque.........................	8 38

Le passage sur le soleil a donc eu lieu, à très peu près, comme je l'avais indiqué.

Une erreur de 6' sur la latitude, la plus forte, je crois, que l'on puisse

admettre, ne pourrait changer que d'une demi-heure l'instant de chacune des deux phases du phénomène : en la supposant dans le sens défavorable, la sortie aurait toujours eu lieu après huit heures; ainsi je suis persuadé que la comète s'est projettée sur le disque du soleil, assez long-temps encore après le lever de cet astre. Espérons que la science retirera de l'ensemble des observations qui auront été faites, toutes les lumières qu'elle doit attendre de cette conjonction nouvelle, l'un des phénomènes les plus importans qui puissent nous être offerts. L'observation du passage d'une comète manquait à l'astronomie physique. A Marseille, je n'ai point été favorisé; le soleil n'a commencé à se dégager des nuages, qu'à $8^{h.}$ 35'. Je n'ai aperçu sur son disque que les taches que j'avais remarquées la veille.

Questions à résoudre.

1.° Construire un triangle équilatéral qui ait ses sommets sur trois circonférences concentriques de rayons donnés.

2.° Etant donnés un point et un cercle, trouver le lieu géométrique du point qui partagerait en deux parties, dans un rapport constant, la ligne menée du point donné à l'un quelconque des points de la circonférence.

3.° Deux triangles ABC et *abc* (*fig.* 94) sont tels que les droites qui joignent les sommets A et *a*, B et *b*, C et *c* se croisent en un point D, on propose de démontrer que les rencontres *n* des côtés AB et *ba*, *p* des côtés CB et *bc*, *m* des côtés CA et *ac*, sont en ligne droite.

4.° On a (*fig.* 95) deux triangles AFG et A'FG construits sur la même base FG; on mène des sommets A et A' des droites à un même point *h* de la base; puis des transversales FD et GB qui se croisent en C sur A*h*, et FD' et GB' qui se croisent en C' sur A'*h*; il s'agit de prouver que les transversales DB et D'B' concourent au même point *k* du prolongement de GF. On peut varier cet énoncé de plusieurs manières, et par exemple, supposer les transversales *k*BD, *k*B'D', puis joindre F et D, G et B, ensuite F et D', G et B', ce qui donne les points de croisement C et C', et démontrer que les droites AC, A'C' etc., vont concourir en *h* sur FG; etc.

FIN DU DEUXIÈME VOLUME.

TABLE GÉNÉRALE

DES MATIÈRES

Contenues dans le deuxième vol. de la CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

ALGÈBRE.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CALCUL INTÉGRAL.

MÉCANIQUE.

MACHINES.

ASTRONOMIE.

PHYSIQUE.

MÉTÉOROLOGIE.

STATISTIQUE.

REVUE SCIENTIFIQUE.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Huit planches.

FIN DE LA TABLE GÉNÉRALE DES MATIÈRES.

ERRATA GÉNÉRAL.

Pag. 48, lig. 5, sept mémoires; *lisez :* huit mémoires.

» 78, » 5, en remont., $Sn = S'm$; *lisez* : $Sn = Sm$.

» 78, » 4, en remont., $= d - ci$; *lisez :* $d - Ci$; des triangles *cix* et COA; *lisez :* C*ix* et COA.

Pag. 135, rétablissez le titre : *Algèbre.*

» 140, lig. 3 et 4 en remont., supprimez ces mots : puisque ces projections ne sont pas parallèles aux traces du plan.

Pag. 161, l'article sur le magnétisme par rotation, est de A. Q.

» 161, lig. 4 en remont., Royale; *lisez :* Royale de Londres.

» 211, effacez le titre : *Géométrie transcendante.*

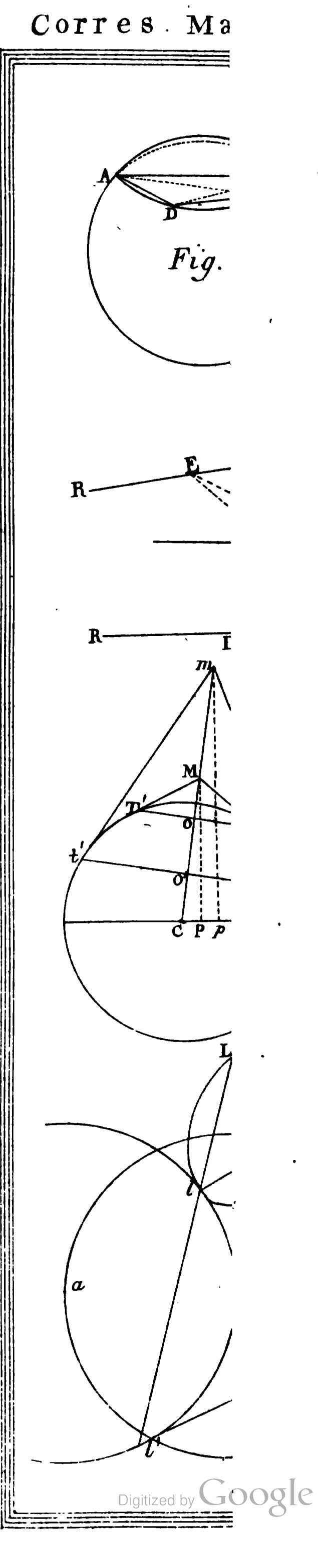
» 211, lig. 5, arrêtes opposés; *lisez :* arrêtes opposées.

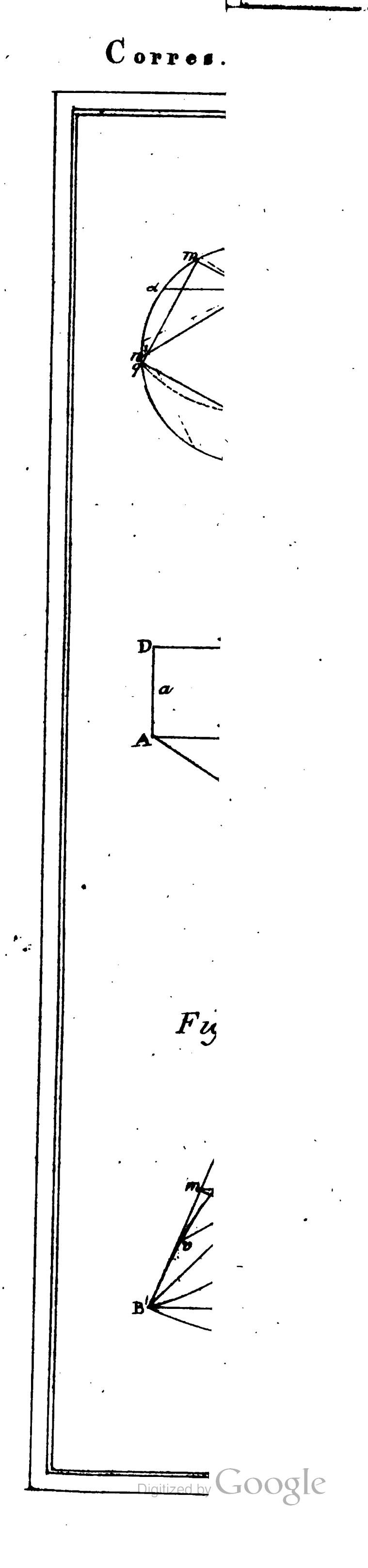
» 256, » 6, en remont. $+$; *lisez :* $-$

» 294, note au bas de la page : dans notre prochain numéro; *lisez :* dans les numéros suivans.

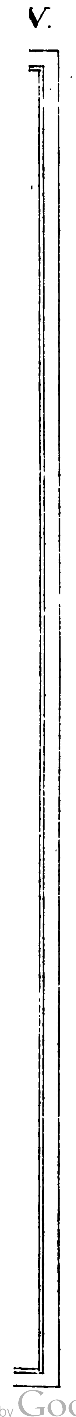
Pag. 361, lig. 6, *Savari,* lisez : *Savary.*

FIN.


A
D
Fig.
E
R
R
I
m
M
T'
o
t'
o'
C
P
p
L
l
a
l'

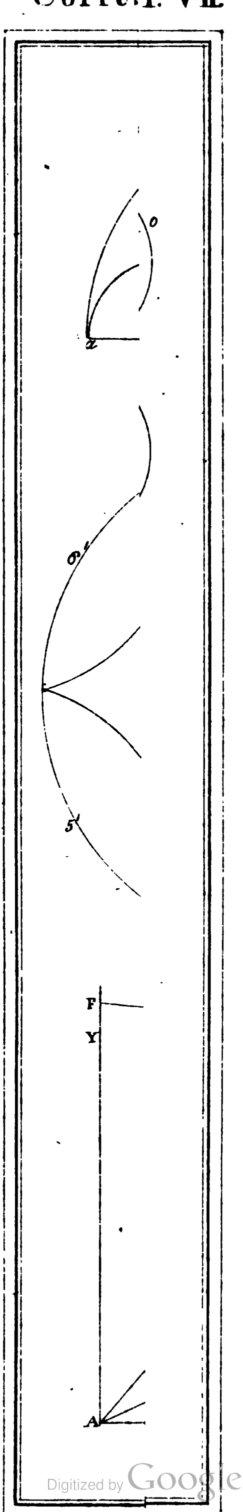

Corres.
m
α
n
q
D
a
A
m
b
B

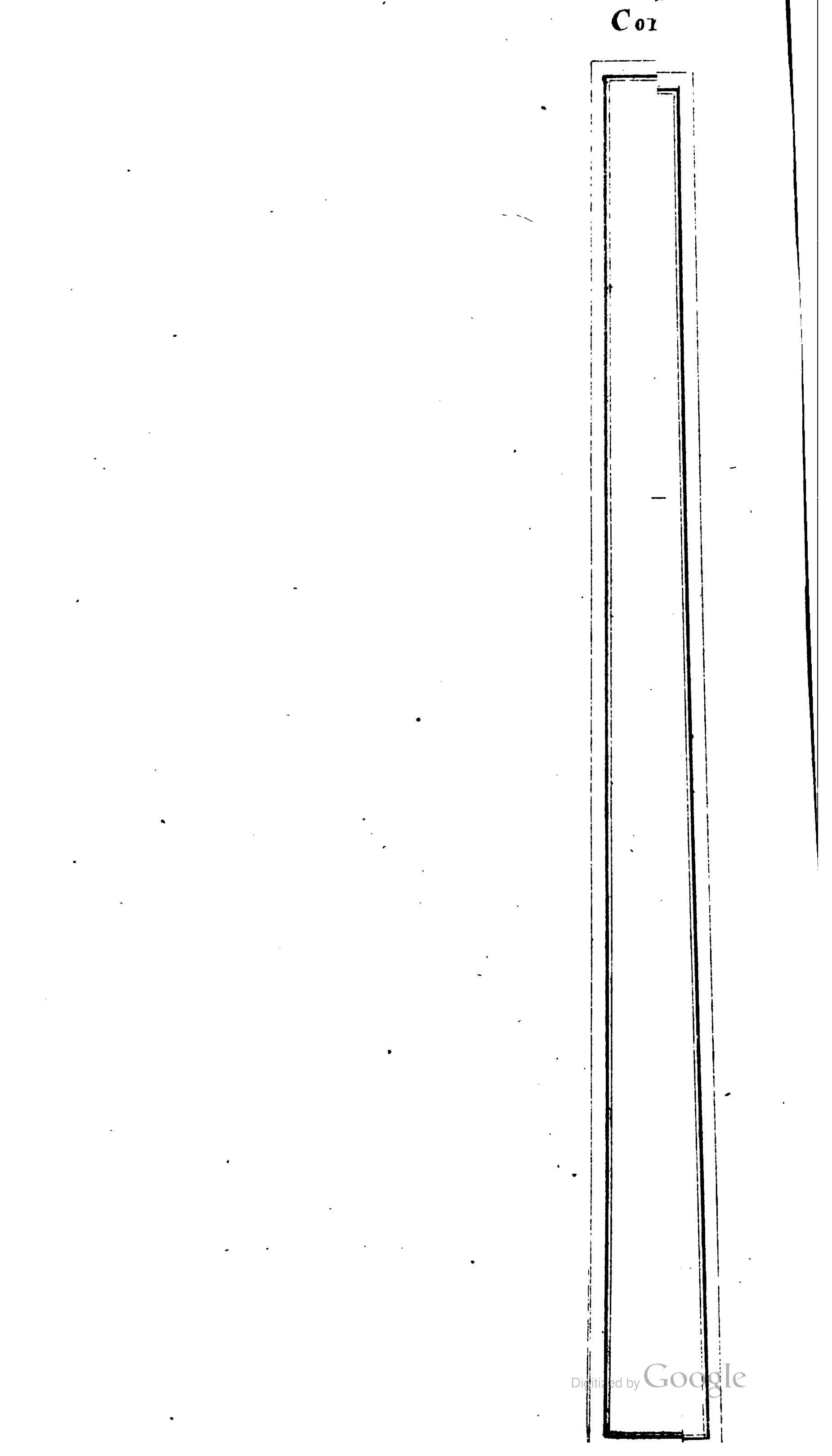
V.



VI

Corre.l.I. VII.




Coı

